Linjär Algebra, del 2, VT 98

Veckoprogram, vecka 17–19

H.D. 13 april 1998

Bevis ur Lay som kan komma på tentan på del 2:
Lay 4: Sats 5, 7, 9, 10, 11, 12
Lay 6: Sats 4, 5, 6, 8, 9, 13
Lay 7: Sats 1, 4

Föreläsningar (10.00-11.45) *Förskjutet ett tillfälle jämfört med den ursprungliga planeringen*
må 20/4 : L6:1-3
må 27/4 : L6:4-6
ti 28/4 : L7:1-2
må 4/5 : L7:3-4
ti 5/5 : Hermiteska matriser *Överkursavsnittet L6:7-8 utgår troligtvis helt ur föreläsningarna*

Lektioner (08.00-09.45)
Nyckeluppgifter:
må 20/4,
L5.5: 3,5,7
L5.6: 1,3,9,11
L5.7: 1,3,9,11

må 27/4, ti 28/4
L6.1: 11,17,24,29,30
L6.2: 5,9,13,15,21,27,29
L6.3: 5,7,9,11,13,17,19,23
L6.4: 9,11
L6.5: 5,7,11,19,20,21,23,25

må 4/5, ti 5/5
L7.1: 11,13,17,21,23,31,35
L7.2: 9,12,13,23,25
L7.3: 5,7,9
L7.4: 3,7,9
L5 suppl: 1,3,7,11,13
Blandade övningar 45-60

Blandade övningar

45. Diagonalisera matrisen

$$A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ -2 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

Bestäm sedan gränsvärdet av A^m då $m \to \infty$.
(Ledning: Matrisen har egenvärdena 1 och 0.5.)

46. Visa att matrisen

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 8 & 8 & 4 \\ -4 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

inte är diagonaliserbar.

47. Bestäm egenvärden och motsvarande egenrum till matrisen

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a & 2 \end{bmatrix}$$

för $a = 1$, $a = -1$, $a = -2$ och $a = -3$.

48. Konstruera en matris vars egenvärden är

$$\frac{(1 \pm i)}{\sqrt{2}}$$

med egenvektorer $(1 \pm i, 1)$.

49. Betrakta systemet $\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$, där A definieras nedan. Förklara varför $\mathbf{x}_k \to 0$ då $k \to \infty$ oberoende av startvärdet $\mathbf{x}_0$.

$$A = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/(2\sqrt{2}) & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

50. Betrakta systemet $\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$, där A definieras nedan. Förklara varför $\mathbf{x}_k$ alltid (alltså för varje startvärde $\mathbf{x}_0$) har ett gränsvärde då $k \to \infty$. Bestäm gränsvärdet då $\mathbf{x}_0 = [0\ 0\ 2]^t$.

$$A = \begin{bmatrix} 1.5 & -0.5 & -0.5 \\ 2.5 & -0.5 & -2.5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

51. Låt $\mathbb{P}_2$ vara det linjära rummet av alla polynom av grad högst 2.

    (a) Betrakta den linjära avbildningen $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ definierad genom att $q = T(p)$ där $q(t) = t^2p''(t) + tp'(t)$. Bestäm egenvärdena till T och beskriv motsvarande egenrum!

    (b) Samma uppgift om $q = T(p)$ definieras av $q(t) = p''(t) - 2tp'(t)$.

52. Lå $C([0,\pi])$ vara det linjära rummet av alla kontinuerliga funktioner på intervallet $[0,\pi]$ och låt H vara det underrum som spänns upp av funktionerna $\sin(\omega t)$ och $\cos(\omega t)$. Betrakta avbildningen $T : H \to H$, som avbildar $\sin(\omega t)$ på $3\cos(\omega t)$ och $\cos(\omega t)$ på $\sin(\omega t) + 2\cos(\omega t)$. Bestäm egenvärden och egenvektorer för T.

53. Låt H vara det linjära rummet av alla lösningar till differensekvationen

$$y_{k+2} + y_{k+1} + y_k = 0, k = 0, 1, 2, \ldots$$

Finn en bas för H. Bestäm sedan matrisen för den linjära avbildningen $T : H \to H$ definierad av att T avbildar följden (y_k) på följden (y_{k+1}). Ange också egenvärden och egenvektorer till T.

54. Betrakta det linjära rummet av alla polynom i en variabel t. Bestäm en bas för det underrum som spänns upp av polynomen

$$t+t^3, -t^2+t^3, 1+t^2, 1+t^3, 1+t+2t^3$$

55. Låt v_1, v_2, v_3 vara linjärt oberoende vektorer i ett linjärt rum. För vilka tal a och b är vektorerna

$$av_1+v_3,\ bv_2+v_3,\ bv_1-av_2+v_3$$

linjärt oberoende?

56. (a) Finn en bas för det ortogonala komplementet till det underrum av $\mathbb{R}^5$, som spänns upp av *raderna* i matrisen

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) Bestäm en bas för det ortogonala komplementet till nollrummet för A.

57. (a) Bestäm det kortaste avståndet från punkten $(1,1,1,1)$ till mängden $x_1+x_2+x_3+x_4=0$

(b) Samma uppgift för punkten $(1,2,3,4)$

58. Låt $T:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ definieras genom att $T(x)$ är den ortogonala projektionen av x på underrummet $x_1+x_2+x_3+x_4=0$. Finn matrisen för T. Bestäm också (utan att räkna) egenvärden och en ortogonal bas av egenvektorer.

59. Låt W vara ett underrum av $\mathbb{R}^n$. Den linjära avbildningen $S:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ definieras genom att $S(x)=2\hat{x}-x$, där $\hat{x}$ är den ortogonala projektionen av x på W.

(a) Beskriv S geometriskt om W är ett plan genom origo.

(b) Finn (för ett allmänt W) egenvärden och motsvarande egenrum till S.

(c) Finn standardmatrisen för S om W är lösningsmängden i $\mathbb{R}^4$ till systemet

$$\begin{cases} x_1-x_2+x_3-x_4 &= 0 \\ x_1+x_2-x_3-x_4 &= 0 \end{cases}$$

(d) Diagonalisera S i uppgiften (c) ovan.

60. Sätt $u=(-2,0,1,0)$ och $v=(1,0,0,1)$ och låt W vara det linjära höljet av $\{u,v\}$. Vi söker den ortogonala projektionen $\hat{x}$ av $x=(1,2,3,4)$ på W. Finn alla fel i följande kalkyl:

$$u\cdot x=1,\ v\cdot x=5$$

$$u\cdot u=5,\ v\cdot v=2$$

$$\hat{x}=\frac{1}{5}u+\frac{5}{2}v=\frac{1}{10}(2u+25v)=\frac{1}{10}(21,0,2,25)$$

Korrigera felen!

Svar till blandade övningar

45. $A = PDP^{-1}$ där (exempelvis)

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}, \ P = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Gränsvärdet av A^m är

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

46. Egenvärdena är 2 och 3. Undersök egenrummen!

47. $a = +1$: Egenvärden: $1 \pm \sqrt{2}$. Egenrum: $\{c(1, 1+\sqrt{2}) : c \in \mathbb{R}\}, \{c(1, 1-\sqrt{2}) : c \in \mathbb{R}\}$
$a = -1$: Egenvärden: 1. Egenrum: $\{c(1,1) : c \in \mathbb{R}\}$ (Matrisen ej diagonaliserbar.)
$a = -2$: Egenvärden: $1 \pm i$. Egenrum: $\{c(1, 1+i) : c \in \mathbb{R}\}, \{c(1, 1-i) : c \in \mathbb{R}\}$
$a = -3$: Egenvärden: $1 \pm i\sqrt{2}$. Egenrum: $\{c(1, 1+i\sqrt{2}) : c \in \mathbb{R}\}, \{c(1, 1-i\sqrt{2}) : c \in \mathbb{R}\}$

48. Ett sätt är att ta lämpliga P och D och sen beräkna $A = PDP^{-1}$. Förslag

$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$$

49. Matrisens egenvärden är $(1 \pm i)/(2\sqrt{2})$ och 0.5. Eftersom absolutbeloppen är < 1 måste $\mathbf{x}_k \to 0$.

50. Egenvärdena är $0.5 \pm 0.5i$ (vars belopp är < 1) samt 1. Egenvektorn som hör till egenvärdet 1 är $(1, 0, 1)$. Om $x_0 = (0, 0, 2)$ blir gränsvärdet $(2, 0, 2)$.

51. Tips: Studera matrisen för T i standardbasen för att hitta egenvärden och egenvektorer.

    (a) $\lambda_1 = 0, \{p : p(t) = c, c \in \mathbb{R}\}$
    $\lambda_2 = 1, \{p : p(t) = ct, c \in \mathbb{R}\}$
    $\lambda_3 = 4, \{p : p(t) = ct^2, c \in \mathbb{R}\}$

    (b) $\lambda_1 = 0, \{p : p(t) = c, c \in \mathbb{R}\}$
    $\lambda_2 = -2, \{p : p(t) = ct, c \in \mathbb{R}\}$
    $\lambda_3 = -4, \{p : p(t) = c(1 - 2t^2), c \in \mathbb{R}\}$

52. Egenvärden -1 ch 3.
Egenrum $\{c(3\sin(\omega t) + \cos(\omega t)) : c \in \mathbb{R}\}$, resp $\{c(\sin(\omega t) + \cos(\omega t)) : c \in \mathbb{R}\}$

53. Egenvärden $\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. Egenvektorer $((\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2})^k)$.

54. Exempelvis de tre första polynomen

55. $a^2 - b^2 + ab = 0$

56. (a) $(0, -1, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 0, 1)$, (b) $(1, 0, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 1, 0), (0, 0, 1, 0, 0)$

57. (a) 2, (b) 5

58. Egenvärden $0, 1, 1, 1$. Egenvektorer $(1, 1, 1, 1), (1, -1, 0, 0), (0, 0, 1, -1), (1, 1, -1, -1)$
Matris

$$\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

59. (a) S är spegling i planet
(b) Egenvärden -1, med egenrum $W^\perp$, och $+1$, med egenrum W
(c)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} (d)\ A = PDP^{-1}, P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

60. Beräkna $u \cdot v$. (De är inte ortogonala). Rätt svar $\hat{x} = (1/2, 0, 2, 9/2)$.