Linjär Algebra, del 2, HT 98

Veckoprogram, vecka 20–23

H.D. 5 maj 1998

Föreläsningar

må 11/5 : Reserv / Tenta 98-01-10 (10.00-11.45)
ti 19/5 : Tenta 98-04-08 och ev. fingerade tentan (8.00-9.45) **OBS: tiden**
Svar till den fingerade tentan finns på sista sidan på denna stencil.

Lektioner (08.00-09.45)
må 11/5, må 18/5, to 28/5, ti 2/6
Övningar ur "Hermiteska matriser" : 1-13
L6 suppl. : 1,2,3,4,5,6,11,12
L7 suppl. : 1,2,4,5
Resterande blandade övningar 34 - 60
Blandade övningar 61-79

Skriftlig examination av grupparbeten. OBS: Nytt sen tidigare scheman
to 28/5 kl 10.15-12.00 i Hörsalen, Matematiskt centrum

Blandade övningar 61–79

61. Lös systemet av differentialekvationer

$$\begin{cases} 18x_1' = & -5x_1 & +4x_2 & -2x_3, & x_1(0)=1 \\ 18x_2' = & +4x_1 & -5x_2 & -2x_3, & x_2(0)=2 \\ 18x_3' = & -2x_1 & -2x_2 & -8x_3, & x_3(0)=3 \end{cases}$$

62. För vilka parametervärden p är den kvadratiska formen $x_1^2+x_2^2+px_1x_2$ positivt definit?

63. Finn det största och minsta värdet av $x_1^2+x_2^2+px_1x_2$ på cirkeln $x_1^2+x_2^2=4$ för olika parametervärden!

64. Finn det största och minsta värdet av

$$x_1^2+x_2^2+2x_3^2+4x_1x_2$$

på enhetssfären $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$. I vilka punkter antas dessa värden?

65. Antag att $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ och betrakta ellipsen $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 = 1$. Vilka punkter på denna ellips ligger längst från origo? Vilka punkter ligger närmast origo?

66. Vilka punkter på kurvan $x_1^2+x_2^2+0.6x_1x_2=1$ ligger närmast origo och vilka ligger längst ifrån origo?

67. Låt A vara en reell $m \times n-$matris med linjärt oberoende kolonner och låt W vara kolonnrummet till A. Visa att $P = A(A^TA)^{-1}A^T$ är standardmatrisen för den ortogonala projektionen av $\mathbb{R}^m$ på W.

68. Bestäm den ortogonala projektionen i $\mathbb{C}^4$ av $\mathbf{z} = (1,2,3,4)$ på det underrum som spänns upp av $\mathbf{u} = (1, i, -1, -i)$ och $\mathbf{v} = (i, -1, -i, 1)$.

69. Finn en unitär diagonalisering av matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 1-i & 0 \\ 1+i & 1 & 1+i \\ 0 & 1-i & 1 \end{bmatrix}$$

70. Betrakta rummet $\mathbb{C}^3$. Låt W vara det underrum som spänns upp av vektorn $(1, i, 1+i)$. Bestäm standardmatrisen för den ortogonala projektionen på W.

71. (a) Betrakta den inhomogena differensekvationen

$$y_{n+k} + a_1 y_{n+k-} + \ldots + a_k y_n = b_n, \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

där (b_n) är en given följd. Antag att (p_n) vara en speciell lösning. Visa att lösningsmängden till den inhomogena differensekvationen består av alla följder $(z_n + p_n)$, där (z_n) löser motsvarande homogena differensekvation.

(b) Lös differensekvationen $y_{n+1} - y_n = b_n$ där $b_n = 0$ om $n \neq r$, $b_r = 1$.

72. Finn minsta kvadrat-lösningen till ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 - x_2 & = 1 \\ x_1 + 3x_2 & = 2 \\ x_1 - 2x_2 & = 3 \end{cases}$$

73. Antag att A och B är två reella matriser som är ortogonalt diagonaliserbara med hjälp av samma ortogonala matris. Visa att detta också gäller AB. Visa även att A och B kommuterar.

74. Följande matris har egenvärdena $-1, 1, 2$. Finn en ortogonal diagonalisering!

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

75. Cauchys olikhet i $\mathbb{R}^n$ säger som bekant att

$$-\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\| \leq \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \leq \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|$$

När gäller likhet i de båda olikheterna.
Visa att

$$-\sqrt{n} \leq x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leq \sqrt{n}$$

om $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1$.

76. Låt H och K vara två underrum i ett godtyckligt linjärt rum. Visa att snittet $H \cap K$ är ett underrum. Ge också exempel på H och K där unionen $H \cup K$ är ett underrum och ett annat exempel där unionen inte är ett underrum.

77. Betrakta det linjära rummet av alla signaler (y_k), k heltal. Låt H vara underrummet av all signaler y sådana att

$$y_{k+3} - 2y_{k+2} - y_{k+1} + 2y_k = 0$$

Bestäm en bas för H.

78. En reellvärd kvadratisk matris kallas skevsymmetrisk om $A^T = -A$. Visa att alla egenvärden ligger på imaginära axeln.

79. Låt A vara en reell $n \times n-$matris med rangen r och antag att P är en inverterbar $n \times n-$matris. Sätt $B = PAP^{-1}$ och visa att B har rangen r.

Svar till blandade övningar 61–79

61. $3x_1(t) = e^{-0.5t} + 2, \;\; 3x_2(t) = 4e^{-0.5t} + 2, \;\; 3x_3(t) = 10e^{-0.5t} - 1$

62. $p^2 < 4$

63. $4 \pm 2p$

64. Största värdet är 3, antas i $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)$
Minsta värdet är -1, antas i $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)$

65. Längst ifrån origo ligger $(0, \pm 1/\sqrt{\lambda_2})$
Närmast origo ligger $(\pm 1/\sqrt{\lambda_1}, 0)$

66. Längst bort från origo ligger $\pm 1/\sqrt{1.4}(1, -1)$ Närmast origo ligger $\pm 1/\sqrt{2.6}(1, 1)$

67. Visa att $P\mathbf{x} \in W$ och att $\mathbf{x} - P\mathbf{x} \in W^{\perp}$ för varje $\mathbf{x}$.

68. $0.5(-1+i, -1-i, 1-i, 1+i)$

69.

$$P = 0.5 \begin{bmatrix} 1 & -1+i & -1 \\ -1-i & 0 & -1-i \\ 1 & 1-i & -1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

70.

$$0.25 \begin{bmatrix} 1 & -i & 1-i \\ i & 1 & 1+i \\ 1+i & 1-i & 2 \end{bmatrix}$$

71. Jämför med sats 6 i Lays kapitel 1.
I (b) är $y_n = c + p_n$ där $p_n = 0$ om $n \leq r$ och $p_n = 1$ om $n > r$.

72. $x_1 = 2, x_2 = -1/14$

73. Skriv $A = UD_1U^T, B = UD_2U^T$ där D_1, D_2 är diagonalmatriser. Observera att D_1 och D_2 kommuterar.

74.

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

75. Likhet gäller när $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$ är parallella. För att visa likheten sätt $\mathbf{y} = (1, 1, \ldots, 1)$.

76. $H = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}, K = \{(0, y) : y \in \mathbb{R}\}$ Unionen är inte ett underrum av $\mathbb{R}^2$.

77. Signalerna u,v och w bildar en bas om $u_k = 2^k$,$v_k = 1$ och $w_k = (-1)^k$

78. Beräkna $||A\mathbf{v}||^2$ på två sätt om $\mathbf{v}$ är en egenvektor. Observera att även origo ligger på imaginära axeln.

79. Kan rangsatsen vara något?

Svar till fingerad tenta

3. $y = 1.9 - 0.1x$
4. $((a+b)/3, 2(a+b)/3)$
5. (a) OBS Om summan av tre positiva heltal är 5 så är två av dem lika. (b) Jobba med $A = UDU^T$
6. $$\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
7. Många möjligheter,t.ex $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
8. Starta med $Uv = \lambda v, Uu = \lambda u$ och beräkna $\|Uv\|$ och $Uv \cdot Uu$