MAN 100 - MATEMATIK MED TILLÄMPNINGAR 1, 2003

FORMELSAMLING I NUMERISK ANALYS

Får användas på tentor i MAN 100, del 2 läsåret 2003/2004

Felanalys och datoraritmetik.
Absolut fel: $\delta a = \hat{a} - a$. Relativt fel: $\frac{\delta a}{a}$.
Bakåtfel: $\hat{x} - x = f^{-1}(\hat{f}(x)) - x$. Felfortplantning: $\delta f \approx f'(\hat{x})\delta x$.
Konditionstal: $\kappa = \frac{|relativ\ avvikelse\ i\ utdata|}{|relativ\ avvikelse\ i\ indata|}$
IEEE - dubbel precision: $(2, 53, -1022, 1023)$

Ekvationslösning.
Konvergensordning: Största q sådant att $\lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1}-x^*|}{|x_k - x^*|^q} = C < \infty$.
Feluppskattning: Enkelrot: $\delta x \approx \frac{f(\hat{x})}{f'(\hat{x}}$. Multipelrot: $\delta x^m \approx m! \frac{f(\hat{x})}{f^{(m)}(\hat{x})}$
Newtons metod: $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0,\ 1,\ ...$
Konvergens hos Newtons metod: Enkelrot: Kvadratisk med $C = \frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}$. Multipelrot med multiplicitet m: Linjär konvergens med $C = \frac{m-1}{m}$
Sekantmetoden: $x_{k+1} = x_k - f(x_k)\frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$
Fixpunktsiteration: $x_{k+1} = g(x_k),\ k = 0,\ 1,\ ....$ Konvergens om $\mid g'(x) \mid \leq 1$ i en omgivning av roten x^*
Metodoberoende feluppskattning: $\mid \hat{x} - x^* \mid \lesssim \frac{|f(\hat{x}|}{|f'(\hat{x})|}$

Approximation av funktioner, interpolation och splines.
Polynom p_n av grad $\leq n$ interpolerar f: $p_n(x_i) = f(x_i),\ i = 0,\ 1,\ ...\ ,\ n$
Trunkeringsfel vid interpolation: $p_n(x) - f(x) = -\frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)\cdot\ ...\ \cdot(x - x_n)$
Newtons form: $p_n(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)(x-x_1) + ... + c_n(x-x_0)(x-x_1)\cdot...\cdot(x-x_{n-1})$
Funktionskänslighet vid interpolation: Linjär: $\mid R_f \mid \leq \delta$, kvadratisk: $\mid R_f \mid \leq 1.25\delta$, om $\mid \delta f \mid \leq \delta$.
Splines: Styckvisa polynom av grad k med derivator av ordning $\leq k-1$ kontinuerliga i knutpunkterna (noderna).

Numerisk integration över intervallet $(a\ ,\ b)$**.**
Trapetsformeln: $T(h) = h[\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) +\ ...\ + f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n)}{2}]$
Trunkeringsfel för trapetsformeln: $R_T = \frac{b-a}{12}h^2 f''(\xi)$, $R_T = a_1h^2 + a_2h^4 + a_3h^6 +\ ...$
Rombergs metod: Trapetsregeln plus Richardsonextrapolation
Simpsons formel: Trapetsformeln plus ett stegs Richardsonextrapolation eller
$S(h) = \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) +\ ...\ + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]$
Trunkeringsfel vid Simpsons formel: $R_T = \frac{b-a}{180}h^4 f^{(4)}(\eta)$
Feluppskattning vid Richardsonextrapolation: $\mid R_T \mid \leq \mid T^{(k)}(h) - T^{(k)}(2h) \mid$
Funktionskänslighet vid Trapetsformeln och Simpsons formel: $\mid R_f \mid \leq (b-a)\epsilon$,där $\mid \delta f \mid \leq \epsilon$

Numerisk linjär algebra
Linjära ekvationssystem: Gausselimination med pivotering: $PA = LU$
Vektornormer: $\| x \|_1 = \sum_{i=1}^{n} | x_i |$, $\| x \|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} | x_i |^2}$, $\| x \|_\infty = \max_{1 \le i \le n} | x_i |$
Matrisnorm: $\| A \| = \max_{\|x\| \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$
$\| A \|_1 = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{n} | a_{ij} |$, $\| A \|_2 = \sqrt{\lambda_{max}(A^T A)}$, $\| A \|_\infty = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} | a_{ij} |$
Egenskap hos matrisnorm: $\| Ax \| \le \| A \| \; \| x \|$
Konditionstal för matris: $\kappa(A) = \| A^{-1} \| \| A \|$
Störning av högerled: $\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \le \kappa(A) \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$
Störning av matris: $\frac{\|\delta x\|}{\|x + \delta x\|} \le \kappa(A) \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}$
Linjärt minstakvadratproblem: $\min_x \| Ax - b \|_2$
Lösning med normalekvationer: $A^T A x = A^T b$
Lösning med QR-faktorisering: $Rx = Q_1^T b$, där $A = Q \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} = Q_1 R$
Lösning med SVD-faktorisering: $x = V_1 \Sigma_1^{-1} U_1^T b$, där $A = U \Sigma V^T$ med kompakt variant $A = U_1 \Sigma_1 V_1^T$

Approximation av derivator, Numerisk lösning av ode
Framåtdifferens: $f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, med fel $R_T = a_1 h + a_2 h^2 + a_3 h^3 + ...$
Bakåtdifferens: $f'(x) \approx \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$ med fel $R_T = a_1 h + a_2 h^2 + a_3 h^3 + ...$
Centraldifferens: $f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$ med fel $R_T = b_1 h^2 + b_2 h^4 + b_3 h^6 + ...$
Centraldifferens för andraderivata: $f''(x) \approx \frac{1}{h^2}[f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)]$ med fel $R_T = b_1 h^2 + b_2 h^4 + b_3 h^6 + ...$
System av första ordnings ode: $\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & a \le t \le b \\ y(a) = c \end{cases}$
Eulers framåtmetod: $y_{k+1} = y_k + h f(t_k, y_k)$
Eulers bakåtmetod: $y_{k+1} = y_k + h f(t_{k+1}, y_{k+1})$
Trapetsmetoden: $y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}[f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, y_{k+1})]$
Testproblem för approximationsordning och stabilitet: $y' = \lambda y, \quad y(0) = c$
Eulers metoder har approximationsordning ett och trapetsmetoden har approximationsordning två.
Euler bakåt och trapetsmetoden är ovillkorligt stabila (A-stabila) medan Euler framåt är villkorligt stabil (kräver tillräckligt litet steg i allmänhet).
Prediktor/korrektor-par: Explicit metod som startmetod, följd av iteration med t.ex. fixpunktsiteration i en implicit metod.