MAN 100 - MATEMATIK MED TILLÄMPNINGAR 1, 2003

INLÄMNINGSUPPGIFT NR 4: ANALYS och MATLAB

Uppgiften är värd 1 kurspoäng

Inlämning till Yosief senast 28 november.

Svartkroppsstrålning, Wiens lag mm

Strålningsflödet vid svartkroppsstrålning till exempel från en hålrumsstrålare ges av Plancks strålningslag. För den monokromatiska emittansen för våglängd λ vid temperatur T gäller

$$m_e(\lambda, T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5(e^{hc/k\lambda T} - 1)}$$

där $h = 6.6256 \cdot 10^{-34}\ Js$ är Plancks konstant, $c = 2.9979 \cdot 10^8 ms^{-1}$ är ljushastigheten i tomrum och $k = 1.3805 \cdot 10^{-23} JK^{-1}$ är Boltzmanns konstant.

Uppgifter

a) Rita ut $m_e(\lambda, T)$ för temperaturerna $T = 3000,\ 4000\ , 5000\ K$ i våglängdsområdet $0 \leq \lambda \leq 3 \cdot 10^{-6}\ m$. Använd **gtext** för att markera 'T=3000' vid första kurvan och motsvarande vid de övriga. Indikera området synligt ljus dvs $0.4 \cdot 10^{-6} \leq \lambda \leq 0.7 \cdot 10^{-6}\ m$, se figur 1.

b) Av figuren ser vi att huvuddelen av strålningen förskjuts mot allt kortare våglängder då temperaturen ökar. Enligt Wiens förskjutningslag gäller

$$\lambda_{max} T = konstant$$

där λ_{max} är den våglängd för vilken strålningen är maximal. Bestäm λ_{max} med **fminbnd** i MATLAB då $T = 3000,\ 4000,\ 5000$. Se till att max-punkten beräknas med tillräcklig noggrannhet genom att styra med **optimset**. Verkar lagen stämma? Vad blir värdet på Wiens konstant?

c) Ett alternativt sätt att bestämma Wiens konstant, som även bevisar lagen, är följande: Derivera m_e med avseende på λ och sätt derivatan till 0. Med lämplig variabeltransformation får Du ekvationen

$$(5 - x)e^x - 5 = 0$$

vars lösning ger x^* och genom återtransformation bestäms λ_{max} och därefter Wiens konstant. Rita upp funktionen $(5 - x)e^x - 5$ i MATLAB för att grovt lokalisera x^*. Gör sedan ett par Newton-iterationer för att bestämma x^* noggrant. Kontrollera konstantens värde med uppgift b.

d) Totala strålningsflödet (emittansen) $M_e(T)$ blir integralen av $m_e(\lambda, T)$ över alla våglängder:

$$M_e(T) = \int_0^\infty m_e(\lambda, T)\ d\lambda$$

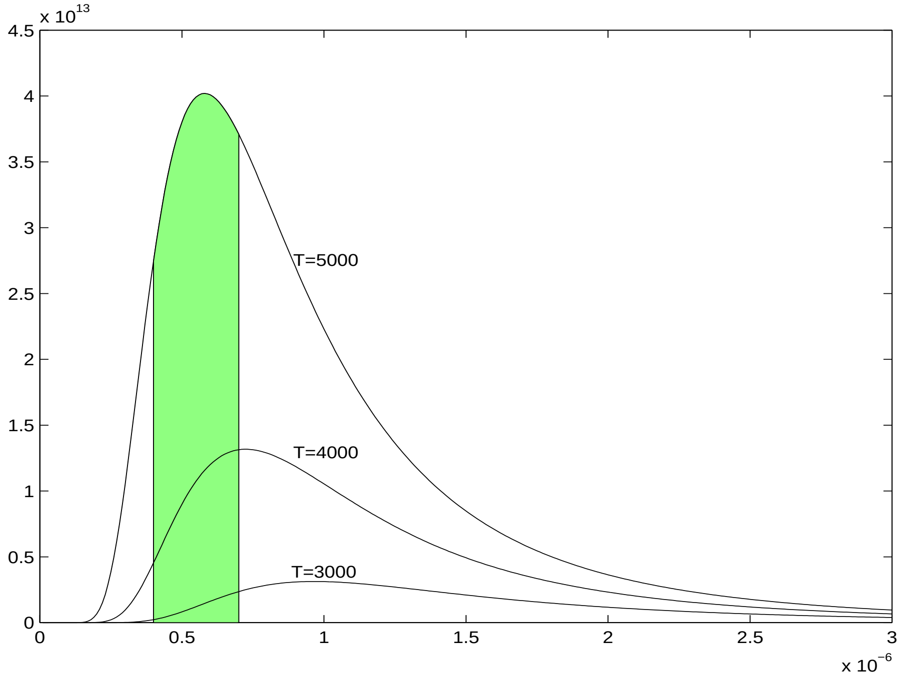

Figure 1: Emittans vid svartkroppsstrålning enligt Plancks lag

Visa genom variabeltransformation (samma som i c) till den kända integralen

$$\int_0^\infty \frac{s^3}{e^s - 1}\, ds = \frac{\pi^4}{15}$$

att $M_e(T) = \sigma T^4$, där $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8}$ är Stefan-Boltzmanns konstant.

Om vi vill bestämma totala energin $M_s(T)$ över synligt ljus $0.4 \cdot 10^{-6} \leq \lambda \leq 0.7 \cdot 10^{-6}$ kan vi inte räkna ut integralen analytiskt med för oss kända metoder. Använd **quadl** i MATLAB för att bestämma

$$M_s(T) = \int_{0.4 \cdot 10^{-6}}^{0.7 \cdot 10^{-6}} m_e(\lambda, T)\, d\lambda$$

Rita upp kvoten mellan energin i synligt spektrum och totala energin dvs $M_s(T)/M_e(T)$ för olika T-värden dvs integralen ska beräknas för många olika T-värden, se figur 2.

e) För långa våglängder används Rayleigh-Jeans strålningslag

$$\tilde{m}_e(\lambda, T) = \frac{2\pi c k T}{\lambda^4}$$

Visa hur den kommer från Plancks lag genom Taylorutveckling av e^x med två termer runt 0. Rita ut $m_e(\lambda, 6000)$ och $\tilde{m}_e(\lambda, 6000)$ för att se för vilka λ approximationen verkar rimlig. Är den användbar för synligt ljus?

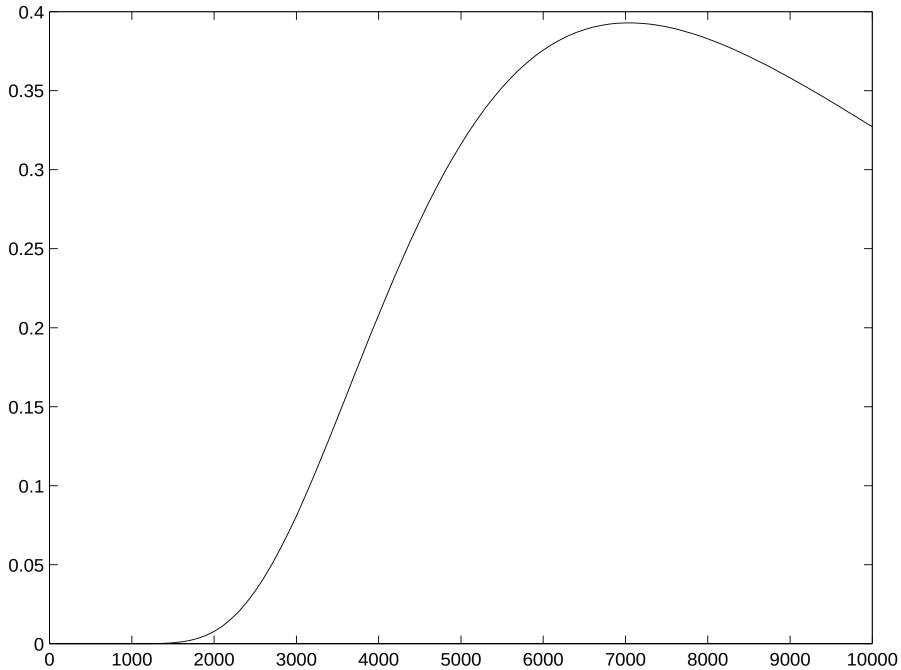

Figure 2: Kvoten mellan energin för synligt ljus och totala energin

Inlämning: Svar på alla frågor, aktuella m-filer och grafer. Härledning av ekvationen i c, härledning av känd integral och Stefan-Boltzmanns konstant i d och bevis av Rayleigh-Jeans lag i e.