Matematik
Göteborgs universitet
J.Brasche,
H. Carlsson

Hjälpmedel: Typgodkänd räknedosa
Telefonvakt: Yosief Wondmagegne
0740-350646

Matematik med tillämpingar 1, del 1 (MAN100)
Analys och linjär algebra, del 1 (MAN140)
Tentamen den 05 januari 2004, 8.45-13.45

Om inget annat anges, skall den fullständiga lösningen på uppgiften redovisas, inklusive räkningar, eventuella hänvisningar till satser och motiveringar. Varje uppgift ger maximalt tre poäng utan den första som ger fyra poäng.

1. På den här uppgiften skall du bara ge svar. (En poäng per deluppgift.)

   (a) Låt $f(x) = \ln(\sqrt{\cos x})$. Bestäm $f'(\frac{\pi}{4})$.

   (b) Är vektorerna
   $$\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} \text{ och } \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ -12 \end{bmatrix}$$
   vinkelräta mot varandra?

   (c) Beräkna
   $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x^2}{x \sin x + x^2} .$$

   (d) Har linjerna
   $$3x + 5y = 1$$
   och
   $$-6x - 8y = 4$$
   en skärningspunkt?

2. Nedan ges sex påståenden. Avgör för vart och ett av dem om det är sant eller falskt. Rätt svar ger 0,5 poäng, fel svar -0,5 poäng och inget svar 0 poäng. Du kan inte få mindre än 0 poäng på hela uppgiften.

   (a) $\arctan(\tan x) = x$ för alla x där $\tan x$ är definierad.

   (b) Varje linjärkombination av lösningar till ett homogent linjärt ekvationssystem är också en lösning.

   (c) Det finns en kontinuerlig funktion med definitionsområde $\{x \in \mathbb{R}; 0 \leq x \leq 1\}$ och värdemängd $\{x \in \mathbb{R}; 0 \leq x < 1\}$.

Vänd!

(d) Om tre vektorer är linjärt beroende, så är var och en av dem en linjär kombination av de två andra.

(e) Om f är en deriverbar funktion med $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$ så måste $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.

(f) Låt l vara en linje, Q en punkt på linjen och P en godtycklig punkt. Låt $\hat{P}$ vara den punkt på l som ligger närmast P. Vektorn från Q till P är då vinkelrät mot vektorn från $\hat{P}$ till P.

3. Skissera kurvan $(x+1)^2e^{-x}$ i stora drag.

4. Bestäm alla lösningar till

$$\begin{aligned} x - y + z &= 3 \\ x - y - z &= 3 \\ x + 2y &= 5 \end{aligned}$$

5. En raket startar vertikalt. Vi, som står 6 kilometer från uppskjutningsplatsen, vill bestämma raketens hastighet när den är 3 kilometer över markytan. För detta mäter vi snabbt och noggrannt hur synvinkeln ändras med tiden och ser att då raketen är på 3 kilometers höjd ändrar sig synvinkeln med hastigheten 2° per sekund. Vad är raketens hastighet?

6. Låt $\mathbf{u}_1 = (1,2,3)$, $\mathbf{u}_2 = (3,3,3)$ och $\mathbf{u}_3 = (4,0,1)$.

a) Bestäm volymen av parallellepipeden med kanterna $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ och $\mathbf{u}_3$.
b) Är vektorerna $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ och $\mathbf{u}_3$ högerorienterade?

7. Låt

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ och } \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \text{ och}$$

$$\text{a) } \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix} \quad \text{b) } \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -9 \end{bmatrix}.$$

Är $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ och $\mathbf{u}_3$ linjärt oberoende?

8. Visa att funktionen $f(x) = (x^3+1)e^{-x}$ har ett största värde då $0 \le x < \infty$. Bestäm detta värde med ett fel som är högst en tusendel.

Skrivningen beräknas vara färdigrättad den 20 januari.