MAN100/140 Lösningar till tentamen den 05 januari 2004

1. (a) Vi har $f(x) = \frac{1}{2}\ln(\cos x)$ så $f'(x) = \frac{1}{2}\frac{-\sin x}{\cos x}$ och $f'(\frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{2}$.

   (b) Nej, ty skalärprodukten är skild frå noll.

   (c) Taylorutveckling ger ($B_i(x)$ är begränsade nära 0)

$$\frac{\sin x^2}{x\sin x + x^2} = \frac{x^2 + x^3 B_1(x)}{x(x + x^2 + x^2 B_2(x)) + x^2} = \frac{1 + xB_1(x)}{2 + xB_1(x)} \to \frac{1}{2}, x \to 0\ .$$

   (d) Ja, nämligen $(-14/3, 3)$.

2. (a) Falskt. Om t.ex. $x = \pi$ så är $\arctan(\tan\pi) = \arctan(0) = 0 \neq \pi$.

   (b) Sant.

   (c) Falskt. En kontinuerlig funktion på ett slutet och begränsat intervall antar sitt stösta värde. Men $\sup[0,1) = 1$ och $1 \notin [0,1)$.

   (d) Falskt. Tag, t ex, två linjärt oberoende vektorer och nollvektorn.

   (e) Falskt. Om t.ex. $f(x) = 1 + \sin x^3/x$ så är $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$ men $f'(x) = -\sin x^3/x^2 + 3x\sin x^3$ saknar gränsvärde då $x \to \infty$.

   (f) Sant.

3. Vi har

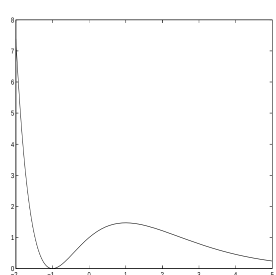
$$y' = 2(x+1)e^{-x} - (x+1)^2 e^{-x} = e^{-x}(1+x)(1-x)$$

och alltså

x		-1		1	
f'	$-\ -\ -$	0	$+\ +\ +$	0	$-\ -\ -$
f	$\searrow$	0	$\nearrow$	$4/e$	$\searrow$

.

Dessutom gäller $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ och $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Grafen blir alltså



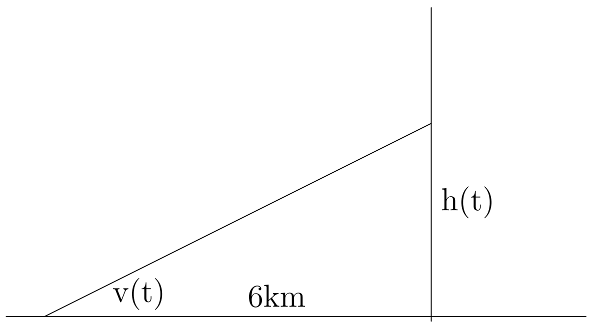
.

4. Addera vi ekvationerna så får vi

$$3x = 11,$$

alltså $x = 11/3$. Den tredje ekvationen medför nu $y = 2/3$. Den andra ekvationen ger nu $z = 0$.

5. Med beteckningar som i figuren har vi $h(t) = 6 \tan v(t)$ där v är vinkeln i radianer.



Vi skall bestämma $h'(t_0)$ där t_0 är den tidpunkt då $h(t_0) = 3$. Vi har $h'(t) = 6\Big(1 + \tan^2(v(t))\Big)v'(t)$

Eftersom $2^\circ = \frac{\pi}{90}$rad och $\tan v(t_0) = \frac{1}{2}$ får vi $h'(t_0) = 6(1 + \frac{1}{4})\frac{\pi}{90} = \frac{\pi}{12}$ km/s eller ungefär 262 m/s. (Ljudhastigheten är 330 m/s.)

6. Lösning: Vi beräknar determinanten av matrisen dess rader är koordinaterna till de givna vektorerna:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 1{\cdot}3 - 2{\cdot}(3{\cdot}1 - 3{\cdot}4) + 3{\cdot}(-12) = 3 - 2{\cdot}(-9) - 36 = -15.$$

a) Volymen av parallellepipeden är lika med absolut beloppet till den här determinanten, så volymen är lika med 15.

b) Vektorerna är högerorienterade och ligger inte på samma plan om och endast om den nämnda determinanten är positiv. Det är den inte och vektorerna är vänsterorienterade.

7. Lösning: $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ och $\mathbf{u}_3$ är linjärt oberoende om och endast om ekvationen

$$x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2 + x_3\mathbf{u}_3 = 0 \qquad (1)$$

endast har den triviala lösningen.

Vi radreducerar den motsvarande totalmatrisen:

a)

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 9 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & -6 & 6 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Den sista matrisen är totalmatrisen till ett ekvationssystem som har oändligt många löningar. Eftersom den sista matrisen är radekvivalent med den första och den första matrisen är totalmatrisen till (1), medför detta att (1) har oändligt många lösningar. Så vektorerna är linjärt beroende.

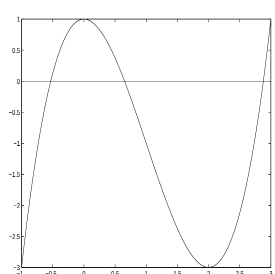
b)

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & -9 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & -8 & 0 \\ 0 & -6 & -24 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 0 \end{bmatrix}.$$

Den sista matrisen är totalmatrisen till ett ekvationssystem som endast har den triviala lösningen. Eftersom den sista matrisen är radekvivalent med den första och den första matrisen är totalmatrisen till (1), medför detta att (1) endast har den triviala lösningen.Så vektorerna är linjärt oberoende.

8. a) För att se att största värdet antas observerar vi att $f(0) = 1$. Dessutom gäller $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$. Så det finns ett tal N med $f(x) < 1$ då $x > N$. Alltså är $\sup\{f(x); x \in [0, +\infty)\} = \sup\{f(x); x \in [0, N]\} = \max\{f(x); x \in [0, N]\}$. Den sista likheten följer av att en kontinuerlig funktion antar sitt största värde på ett slutet och begränsat intervall. (Del a) följer också av (den svårare) del b) nedan.)

   b) Vi skalll studera derivatans tecken. Vi har $f'(x) = -e^{-x}(x^3 - 3x^2 + 1)$. Vi vill hitta derivatans nollställen. Först vill vi skissa $g(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ för att se hur många nollställen g har och grovt avgöra vad de ligger. Efter teckenstudium av $g'(x)$ ser vi att g ser ut så här:



.

Vi ser alltså att $g(x)$ har tre nollställen r_1, r_2 och r_3 där $r_1 < 0$, $0 < r_2 < 2$ och $r_3 > 2$. Vi får följande teckentabell

x	0		r_2		r_3	
f'	1	$-\ -\ -$		$+\ +\ +$		$-\ -\ -$
f	1	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

.

Från tabellen ser vi att det största värdet antas då $x = 0$ eller $x = r_3$. Men $f(3) \approx 1,4 > 1 = f(0)$ så det största värdet antas då $x = x_{max} = r_3$. Det gäller att beräkna x_{max}. och $f(x_{max})$. Vi använder Newtons metod och sätter $x_0 = 3$ och sedan

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x)}{g'(x)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \ .$$

Vi får (med fyra decimaler) $x_1 = 2,8889$, $x_2 = 2,8794$ och $x_3 = 2,8794$. Låt nu $x_- = 2,8793$ och $x_+ = 2,8795$. Då är $f(x_-) < 0$ och $f(x_+) > 0$ så $x_- < x_{max} < x_+$.

Medelvärdessatsen ger $f(x_{max}) - f(2,8794) = f'(\xi)(x_{max} - 2,8794)$ där $x_- < \xi < x_+$. Så$|f(x_{max}) - f(2,8794)| \leq |f'(\xi)| \cdot 10^{-4}$. Men $|f'(\xi)| \leq e^{-x_-} g(x_+) \approx 5 \cdot 10^{-5}$. Så $f(x_{max}) = f(2,8794) \pm 5 \cdot 10^{-9}$ vilket ger att största värdet är $1,397$ med den önskade nogrannheten.