Determinanter och orientering

Låt

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vi antar att $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ är en standardbas för $\mathbb{R}^3$ dvs en högerorienterad ortonormerad bas.

1. Låt

$$A_2 = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & -\sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & -\sin\gamma \\ 0 & \sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix}.$$

a) Beräkna $\det(A_j)$ för $j = 2, 3, 4$.

b) Vi får se att

$$\det(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_p) = \det(A_1) \cdot \det(A_2) \cdot \ldots \cdot \det(A_p).$$

Visa med hjälp av det här resultatet och a) att

$$\det([\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \mathbf{e}_3] \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4) = 1.$$

2. Sätt

$$[\mathbf{f}_1 \quad \mathbf{f}_2 \quad \mathbf{f}_3] = [\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \mathbf{e}_3] \cdot A_2.$$

a) Visa att $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$ är en ortonormerad bas.

b) Övertyga dig att $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$ är högerorienterade.

c) Låt $\mathbf{h}_1$ vara en godtycklig vektor. Visa att α kan väljas sådant att $\mathbf{f}_2$ är vinkelrät (ortogonal) mot $\mathbf{h}_1$.

3. Låt $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$ vara som i uppgift 2. och sätt

$$[\mathbf{g}_1 \quad \mathbf{g}_2 \quad \mathbf{g}_3] = [\mathbf{f}_1 \quad \mathbf{f}_2 \quad \mathbf{f}_3] \cdot A_3.$$

a) Visa att $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$ är en ortonormerad bas.

b) Övertyga dig att $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$ är högerorienterade.

c) Låt $\mathbf{h}_1$ vara en normerad vektor som är vinkelrät (ortogonal) mot $\mathbf{f}_2$. Visa att β kan väljas sådant att $\mathbf{g}_1 = \mathbf{h}_1$.

4. Låt $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$ vara som i uppgift 3. och sätt

$$[\mathbf{d}_1 \quad \mathbf{d}_2 \quad \mathbf{d}_3] = [\mathbf{g}_1 \quad \mathbf{g}_2 \quad \mathbf{g}_3] \cdot A_4.$$

a) Visa att $\mathbf{d}_1$, $\mathbf{d}_2$, $\mathbf{d}_3$ är en ortonormerad bas.

b) Övertyga dig att $\mathbf{d}_1$, $\mathbf{d}_2$, $\mathbf{d}_3$ är högerorienterade.

c) Låt $\mathbf{h}_1$, $\mathbf{h}_2$, $\mathbf{h}_3$ vara en standard bas och $\mathbf{g}_1 = \mathbf{h}_1$. Visa att γ kan väljas sådant att

$$\mathbf{d}_1 = \mathbf{h}_1, \quad \mathbf{d}_2 = \mathbf{h}_2, \quad \mathbf{d}_3 = \mathbf{h}_3.$$

5. Visa med hjälp av resultaten i uppgifterna 1. – 4. att

$$\det([\mathbf{h}_1 \quad \mathbf{h}_2 \quad \mathbf{h}_3]) = 1$$

för varje standard bas $\mathbf{h}_1$, $\mathbf{h}_2$, $\mathbf{h}_3$.

6. Visa med hjälp av 5. att $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ är högerorienterade och inte ligger på samma plan om och endast om

$$\det([\mathbf{u} \quad \mathbf{v} \quad \mathbf{w}]) > 0.$$

Något om lösningen

1.a) $\det(A_j) = 1$ för $j = 2, 3, 4$.

2.a),b)
$\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ överförs till $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$ av en vridning omkring $\mathbf{e}_3$ – axeln. Att $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ är en standardbas medför därför att också $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$ är en standardbas.

3.a),b)
$\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$ överförs till $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$ av en vridning omkring $\mathbf{f}_2$ – axeln. Att $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$ är en standardbas medför därför att också $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$ är en standardbas.

4.a),b)
$\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$ överförs till $\mathbf{d}_1$, $\mathbf{d}_2$, $\mathbf{d}_3$ av en vridning omkring $\mathbf{g}_1$ – axeln. Att $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$ är en standardbas medför därför att också $\mathbf{d}_1$, $\mathbf{d}_2$, $\mathbf{d}_3$ är en standardbas.

2.c) Väljer vi vridningsvinkeln α på rätt sätt så är $\mathbf{f}_2$ vinkelrät (ortogonal) mot $\mathbf{h}_1$:s ortogonal projektion på $\mathbf{e}_1$–$\mathbf{e}_2$–planet. Om $\mathbf{f}_2$ är vinkelrät (ortogonal) mot $\mathbf{h}_1$:s ortogonal projektion på $\mathbf{e}_1$–$\mathbf{e}_2$–planet så är $\mathbf{f}_2$ också vinkelrät mot $\mathbf{h}_1$.

3.c) $\mathbf{h}_1$, $\mathbf{f}_1$ och $\mathbf{f}_3$ är ortogonala mot $\mathbf{f}_2$. Väljer vi vridningsvinkeln β på rätt sätt så blir $\mathbf{g}_1 = \mathbf{h}_1$.

4.c) $\mathbf{h}_2$, $\mathbf{g}_2$ och $\mathbf{g}_3$ är ortogonala mot $\mathbf{h}_1 = \mathbf{g}_1 = \mathbf{d}_1$. Väljer vi vridningsvinkeln γ på rätt sätt så blir $\mathbf{d}_2 = \mathbf{h}_2$.

Eftersom $\mathbf{h}_1$, $\mathbf{h}_2$, $\mathbf{h}_3$ och $\mathbf{d}_1$, $\mathbf{d}_2$, $\mathbf{d}_3$ är standardbaser och $\mathbf{h}_1 = \mathbf{d}_1$ och $\mathbf{h}_2 = \mathbf{d}_2$ är

$$\mathbf{h}_3 = \mathbf{h}_1 \times \mathbf{h}_2 = \mathbf{d}_1 \times \mathbf{d}_2 = \mathbf{d}_3.$$

5. P g a upggifterna 2., 3. och 4. kan α, β och γ väljas sådant att

$$[\mathbf{h}_1 \quad \mathbf{h}_2 \quad \mathbf{h}_3] = [\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \mathbf{e}_3] \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4.$$

Högerledets determinant är lika med 1 enligt uppgift 1.b).

6. Vi väljer en standardbas $\mathbf{h}_1$, $\mathbf{h}_2$, $\mathbf{h}_3$ sådant att

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} &= x \cdot \mathbf{h}_1, \\
\mathbf{v} &= x' \cdot \mathbf{h}_1 + y' \cdot \mathbf{h}_2, \\
\mathbf{w} &= x'' \cdot \mathbf{h}_1 + y'' \cdot \mathbf{h}_2 + z'' \cdot \mathbf{h}_3
\end{aligned}$$

och $x > 0$ och $y' > 0$.

Då är **u**, **v**, **w** högerorienterade och ligger inte på samma plan om och endast om $z'' > 0$.

Dessutom gäller

$$[\mathbf{u} \quad \mathbf{v} \quad \mathbf{w}] = [\mathbf{h}_1 \quad \mathbf{h}_2 \quad \mathbf{h}_3] \cdot \begin{bmatrix} x & x' & x'' \\ 0 & y' & y'' \\ 0 & 0 & z'' \end{bmatrix}.$$

Eftersom $\det(B \cdot C) = \det(B) \cdot \det(C)$ och p g a uppgift 5. medför detta att

$$\det([\mathbf{u} \quad \mathbf{v} \quad \mathbf{w}]) = xy'z''.$$

Därför är $\det([\mathbf{u} \quad \mathbf{v} \quad \mathbf{w}]) > 0$ om och endast om $z'' > 0$.