Matematik
Göteborgs universitet
J.Brasche,
H. Carlsson

Hjälpmedel: Typgodkänd räknedosa
Telefonvakt: Yosief Wondmagegne
0740-350646

**Matematik med tillämpingar 1, del 1 (MAN100)**
**Analys och linjär algebra, del 1 (MAN140)**
Tentamen den 27 oktober 2003, 8.45-13.45

Om inget annat anges, skall den fullständiga lösningen på uppgiften redovisas, inklusive räkningar, eventuella hänvisningar till satser och motiveringar. Varje uppgift ger maximalt tre poäng utan den första som ger fyra poäng.

1. På den här uppgiften skall du bara ge svar. (En poäng per deluppgift.)

   (a) Bestäm
   $$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{x} .$$

   (b) Är vektorerna
   $$\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix} \text{ och } \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 12 \\ 16 \end{bmatrix}$$
   linjärt oberoende ("linearly independent" på engelska)?

   (c) Bestäm största värdet av funktionen
   $$f(x) = \frac{x}{1+x^2} , \quad x \in \mathbb{R} .$$

   (d) Har linjerna
   $$2x + 4y = 2$$
   och
   $$-3x - 6y = 8$$
   en skärningspunkt?

2. Nedan ges sex påståenden. Avgör för vart och ett av dem om det är sant eller falskt. Rätt svar ger 0,5 poäng, fel svar -0,5 poäng och inget svar 0 poäng. Du kan inte få mindre än 0 poäng på hela uppgiften.

   (a) Ett homogent linjärt ekvationssystem med flera obekanta än ekvationer har alltid oändligt många lösningar.

   (b) En kontinuerlig funktion är alltid deriverbar.

   (c) Om tre vektorer är linjärt oberoende, så är var och en av dem en linjärkombination av de två andra.

Vänd!

(d) Det finns en kontinuerligt deriverbar funktion på $\mathbb{R}$ med två nollställen vars derivata saknar nollställen.

(e) Om en $m \times n$ – matris $A$ har $p$ pivotpositioner och $p < n$ så finns $n - p$ linjärt oberoende vektorer sådana att deras linjära hölje ("span" på engelska) är lika med lösningsmängden till

$$A \cdot \mathbf{x} = 0.$$

(f) Kurvan $y = \arctan x$ har en tangent som är parallell med linjen $2x - y = 5$.

3. Rita kurvan $(x+1)^2 e^{-x}$ i stora drag.

4. Låt $l$ vara linjen som beskrivs av ekvationen

$$x = 2y = 4z.$$

Låt $Q = (6, 6, 6)$.

a) Bestäm den punkt $\hat{Q}$ på linjen $l$ som ligger närmast $Q$.
b) Bestäm avståndet mellan linjen $l$ och $Q$.

5. På en tentamen i matematik försökte en elev att lösa en andragradsekvation med fixpunktsiteration genom att rekursivt definiera $a_n$ genom

$$a_0 = 1 \quad \text{och} \quad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}\ , n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

(a) Visa att följden $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ är konvergent.

(b) Vad är $\lim_{n\to\infty} a_n$? Bevisa ditt påstående.
(Du behöver inte klara del a) för att få poäng på b))

6. Låt $\mathbf{u}_1 = (2, 0, 3)$, $\mathbf{u}_2 = (2, 2, 2)$ och $\mathbf{u}_3 = (1, 2, 3)$.

a) Bestäm volymen av parallellepipeden med kanterna $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ och $\mathbf{u}_3$.
b) Är vektorerna $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ och $\mathbf{u}_3$ högerorienterade?

7. Låt

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ 15 \end{bmatrix}$$

och

$$\text{a) } \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \text{b) } \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -9 \end{bmatrix}.$$

Är $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ och $\mathbf{u}_3$ linjärt oberoende?

8. Bestäm det kortaste avståndet mellan kurvan $y = x^2$ och linjen $x + y = -1$.