Matematik
Göteborgs universitet

Analys och linjär algebra

Kortfattade lösningar till tentamen den 27 oktober 2003

1. (a)
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x} = 2\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{2x} = 2\cdot 1 = 2\ .$$

   (b) Nej, den andra vektorn är lika med 2 gånger den första.

   (c) Vi har
$$f'(x) = \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{(1-x)(1+x)}{(1+x^2)^2}\ ,$$
   så

x		-1		1	
f'	$-\ -\ -$	0	$+\ +\ +$	0	$-\ -\ -$
f	$\searrow$	$-1/2$	$\nearrow$	$1/2$	$\searrow$

   Tabellen visar att f har ett lokalt maximum $\frac{1}{2}$ då $x=1$. Dessutom gäller $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ så detta är också funktionens största värde.

   (d) Nej, multiplicerar vi den första ekvationen med -3 och den andra med 2 så får vi $-6x-12y=-6$ och $-6x-12y=16$. Dessa ekvationer beskriver fortfarande samma linjer. Koordinatparet (x,y) för skärningspunkten måste uppfyller båda ekvationerna. Det är uppenbart inte möjligt och skärningspunkten saknas.

2. (a) Sant. Låt m vara antalet ekvationer och $n>m$ vara antalet obekanta. Totalmatrisen till ekvationssystemet kan inte ha mer än m pivotpositioner. Så lösningsmängden är lika med det linjära höljet av minst $n-m$ linjärt oberoende vektorer. Speciellt har lösningsmängden oändligt många element.

   (b) Falskt. Ett motexempel ges av $y=|x|$ som är kontinuerlig men inte deriverbar då $x=0$.

   (c) Falskt. Om en vektor vore en linjär kombination av de andra två så skulle det finnas en icketrivial möjlighet att skriva 0 som linjär kombination av dessa tre vektorer och vektorerna skulle inte vara linjärt oberoende.

(d) Falskt, derivatan måste ha minst ett nollställe. Om nollställena är a och b så är finns enligt medelvärdessatsen ett tal ξ med $f'(\xi) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$.

(e) Sant. Har visats på föreläsningen (och i Lays bok, förstås).

(f) Falskt. Linjen har riktningskoefficienten 2. Men $arctan(x)$ har derivatan $\dfrac{1}{1+x^2}$ och riktningskoefficienten för en tangent till kurvan är alltså högst 1.

3. Vi har

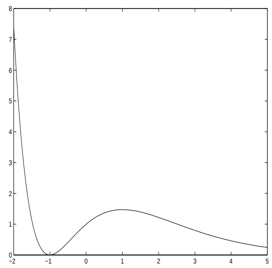
$$y' = 2(x+1)e^{-x} - (x+1)^2 e^{-x} = e^{-x}(1+x)(1-x)$$

och alltså

x		-1		1	
f'	$-\ -\ -$	0	$+\ +\ +$	0	$-\ -\ -$
f	$\searrow$	0	$\nearrow$	$4/e$	$\searrow$

.

Dessutom gäller $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ och $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Grafen blir alltså



.

4. a)
$z = 0$ ger att punkten $K = (0,0,0)$ ligger på l.
$z = 1$ ger att punkten $P = (4,2,1)$ ligger på l.

Vi har sett under föreläsningen att vektorn $\mathbf{u}$ från K till $\hat{Q}$ uppfyller

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|^2}\,\mathbf{w},$$

där $\mathbf{v}$ är vektorn från K till Q och $\mathbf{w}$ är vektorn från K till P.

Så

$$\mathbf{u} = \frac{(6,6,6)\cdot(4,2,1)}{|(4,2,1)|^2}(4,2,1) = \frac{42}{21}(4,2,1) = (8,4,2).$$

Vektorn från K till $\hat{Q}$ och $\hat{Q}$ har samma koordinater ty $K = (0,0,0)$. Så:

$$\hat{Q} = (8,4,2).$$

b)
Avståndet mellan Q och l är lika med avståndet mellan $\hat{Q}$ och Q ty $\hat{Q}$ är punkten på l som ligger närmast Q. Avståndet mellan Q och l är därför lika med

$$|(6,6,6) - (8,4,2)| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{24}.$$

5. a)
En skiss över kurvorna $y = \sqrt{2+x}$ och $y = x$ och/eller numeriskt expriment antyder att $a_n \nearrow 2$, $n \to \infty$.För att bevisa det använder vi induktion.
Det första vi visar är att följden är växande.
Att $a_1 = \sqrt{3} > 1 = a_0$ är klart. Antag nu att $a_{n+1} > a_n$ för något n. Då gäller $a_{n+2} = \sqrt{2 + a_{n+1}} > (1) > \sqrt{2 + a_n} = a_{n+1}$. Att (1) gäller följer av induktionsantagandet $a_{n+1} > a_n$ och att $\sqrt{2+x}$ är växande.
Härnäst bevisar vi att $a_n < 2$ för alla n. Det är förstås sant för $n = 0$, och om det är sant för ett visst n så gäller för $n+1$ att $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} < \sqrt{2+2} = 2$.
b)
Låt $a = \lim_{n\to\infty} a_n$.Om vi i formeln $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ låter $n \to \infty$ får vi $a = \sqrt{2+a}$ vilket (efter lite räknande) ger $a = 2$.

6. Låt $\mathbf{u}_1 = (2,0,3)$, $\mathbf{u}_2 = (2,2,2)$ och $\mathbf{u}_3 = (1,2,3)$.

Vi beräknar determinanten av matrisen med dessa vektorer som rader. Den är

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = 2 \cdot (2 \cdot 3 - 2 \cdot 2) + 3 \cdot (2 \cdot 2 - 2 \cdot 1) = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 = 10.$$

a) Volymen av parallellepipeden är lika med absolut beloppet av denna determinant, så volymen är lika med 10.

b) Vektorerna är högerorienterade (och ligger inte i ett plan) om och endast om den nämnda determinanten är positiv. Det är den och vektorerna är alltså högerorienterade.

7. $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ och $\mathbf{u}_3$ är linjärt oberoende om och endast om ekvationen

$$x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2 + x_3\mathbf{u}_3 = 0 \tag{1}$$

endast har den triviala lösningen.

Vi radreducerar den motsvarande totalmatrisen:

a)

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 8 & 1 & 0 \\ 3 & 15 & 2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -7 & 0 \\ 0 & 6 & -10 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 0 \end{bmatrix}.$$

Den sista matrisen är totalmatrisen till ett ekvationssystem som uppenbart endast har den triviala lösningen. Eftersom den sista matrisen är radekvivalent med den första och den första matrisen är totalmatrisen till (1), medför detta att (1) endast har den triviala lösningen. Så vektorerna är linjärt oberoende.

b)

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 0 \\ 2 & 8 & 2 & 0 \\ 3 & 15 & -9 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 0 \\ 0 & 6 & -24 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Den sista matrisen är totalmatrisen till ett ekvationssystem som har (t ex) den icketriviala lösningen $x_3 = 1$, $x_2 = 4$ och $x_1 = -17$. Eftersom den sista matrisen är radekvivalent med den första och den första matrisen är totalmatrisen till (1), medför detta att (1) också har den icketriviala lösningen $x_1 = -17$, $x_2 = 4$ och $x_3 = 1$. Så

$$-17\mathbf{u}_1 + 4\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3 = 0$$

(t ex) och vektorerna är linjärt beroende.

8. Vi bestämmer först avståndet från en godtycklig punkt $P = (z, z^2)$ på parabeln till linjen. För detta observerar vi först att linjen har normalvektor $\mathbf{n} = (1, 1)$. Så om vi bestämmer t så att $Q = P + t\mathbf{n}$ ligger på linjen blir detta avstånd $d(z) = |t\mathbf{n}| = |t|\sqrt{2}$. Nu är $Q = (z + t, z^2 + t)$ och vi får $z + t + z^2 + t = -1$ eller $t = -\frac{1}{2}(1 + z + z^2)$. Det är lätt att se att detta uttryck är negativt för alla z så $d(z) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + z + z^2)$.

   Vi skall nu minimera $d(z)$. Vi har $d'(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + 2z) = 0$ om $z = -\frac{1}{2}$. Teckenstudie av derivatan visar att detta ger minimum. Vi får $d_{\min} = d(-\frac{1}{2}) = \frac{3}{4\sqrt{2}}$.