Matematik med tillämpningar, 1

Tentaexempel

Om inget annat anges, skall den fullständiga lösningen på uppgiften redovisas, inklusive räkningar, eventuella hänvisningar till satser och motiveringar. Varje uppgift ger maximalt tre poäng.

1. På den här uppgiften skall du bara ge svar. (En poäng per deluppgift.)

   (a) Beräkna derivatan av funktionen $x \cos x^2$.

   (b) Lös ekvationssystemet

   $$\begin{cases} 2x + 4y + 6z = 0 \\ x + y + z = 1 \\ 3x + 4y + 5z = 2 \end{cases} .$$

   (c) Beräkna gränsvärdet

   $$\lim_{x \to \infty} \frac{x^5 \ln x + 2e^x \ln x^2}{1 + 3x^2 + e^x \ln x} .$$

2. Nedan ges sex påståenden. Avgör för vart och ett av dem om det är sant eller falskt. Rätt svar ger 0,5 poäng, fel svar -0,5 poäng och inget svar 0 poäng. Du kan inte få mindre än 0 poäng på hela uppgiften.

   (a) $\arcsin(\sin x) = x$ för alla reella x.

   (b) $\sin(\arcsin x) = x$ för alla reella x med $-1 \leq x \leq 1$.

   (c) Avståndet mellan punkterna $(1, 1, 1)$ och $(2, 3, 4)$ i $\mathbb{R}^3$ är 14.

   (d) Det finns en kontinuerlig funktion med definitionsmängd $\{x \in \mathbb{R}; 0 \leq x \leq 1\}$ och värdemängd $\{x \in \mathbb{R}; 0 < x < 1\}$.

   (e) Ekvationssystemet

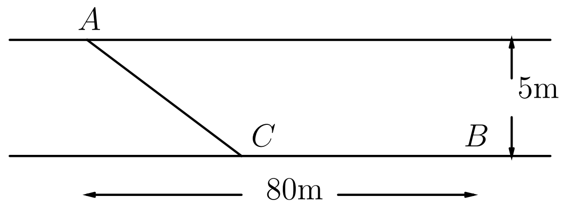
   $$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 3x + 7y = 0 \end{cases}$$

   har endast den trivala lösningen.

   (f) Vektorerna $\mathbf{u} = (1, 2, 7)$ och $\mathbf{v} = (2, -2, 1)$ är ortogonala.

3. Välj ytterligare en vektor så att den tillsammans med $\mathbf{u} = (1, 2, 3)$ och $\mathbf{v} = (4, 4, 6)$ spänner $\mathbb{R}^3$. Visa detta.

4. Ett företag skall dra en elkabel över en kanal från A till B som i figuren.



Det är $2,5$ gånger så dyrt att dra kabeln i vattnet som på land. Var skall C ligga för att kostnaden skall bli minimal?

5. Visa att vektorerna $(1, 2, 0)$, $(0, 1, 2)$ och $(2, 0, 1)$ är en bas för $\mathbb{R}^3$ och bestäm koordinaterna för vektorn $(1, -2, 1)$ i denna bas.

6. Rita kurvan
$$y = \frac{\ln|x-2|}{(x-2)^3}$$
i stora drag.

7. (a) Hur många rötter har ekvationen $x^5 - 5x + 1 = 0$?

   (b) Bestäm den största av rötterna med fyra korrekta decimaler.

8. I en kemisk fabrik kan vi producera en viss produkt på flera sätt. Vi kan välja de ingående mängderna $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ fritt så länge x_1, x_2 och x_3 är ickenegativa och vissa samband som kan skrivas
$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$
är uppfyllda, där
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 5 & -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}.$$
Den blandning som blir billigast för oss är den där $|\mathbf{x}|$ är minst. Bestäm denna blandning.

Matematik för naturvetare, 1
Tentamen den 5 januari 2001, 8.45-13.45
(Något modifierad)

Om inget annat anges, skall den fullständiga lösningen på uppgiften redovisas, inklusive räkningar, eventuella hänvisningar till satser och motiveringar. Alla uppgifter utom uppgift 5 ger sammanlagt maximalt 3 poäng.

1. (a) Man vet att en vinkel v ligger i första kvadranten ($0 \leq v \leq \pi/2$) och att $\tan v = \sqrt{7}$. Bestäm $\cos 2v$.

   (b) Finns det något plan som innehåller både linjen

   $$L_1 : (x, y, z) = (1, 2, 3) + s(1, 2, 0)$$

   och

   $$L_2 : (x, y, z) = (0, 3, -5) + t(1, -1, 1)?$$

   Hitta ekvationen för planet eller motivera att något sådant plan inte finns.

   (c) Beräkna

   $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x^2}{x^4 + 5x^2} .$$

2. Nedan ges 6 påståenden. Avgör för vart och ett av dem om det är sant eller falskt. Endast svar skall ges. Rätt svar ger 0,5 poäng, fel svar -0,5 poäng och inget svar 0 poäng. Du kan inte få mindre än 0 poäng på hela uppgiften.

   (a) Låt f vara en deriverbar funktion. Antag att f har precis tre olika nollställen. Då har f' högst två olika nollställen.

   (b) Om A är en $n \times n$ matris och det finns en vektor $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ sådan att $(A\mathbf{x} + A(A\mathbf{x})) = \mathbf{0}$, så finns en vektor $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ med $A\mathbf{y} = \mathbf{0}$.

   (c) Om funktionen f^2 är kontinuerlig så måste också funktionen f vara kontinuerlig.

   (d) Linjen $L : (x, y, z) = (1, -3, 0) + t(1, 2, 3)$
   skär planet $\pi : (x, y, z) = (1, 3, 2) + s(2, 1, 0) + t(3, 0, 2)$ i punkten $(4, 3, 9)$.

   (e) Om f är en deriverbar funktion med $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$ så måste $f(x)$ ha ett gränsvärde då $x \to \infty$.

   (f) Ekvationssystemet

   $$\begin{aligned} &x_1 + 2x_2 - 4.3x_3 = 1 \\ &3.3x_1 - 10.1x_2 + 5.2x_3 = 4.4 \end{aligned}$$

   har en entydig lösning.

3. Vi står på en bergstopp med koordinaterna $(-2, 1, 10)$ och observerar ett flygplan. Med hjälp av vår kompis på berget bredvid observerar vi att flygplanet rör sig på en linje som passerar genom punkterna $(-13, -1, 15)$ och $(-9, 2, 15)$. Hur långt från oss kommer flygplanet befinna sig när det är närmast?

4. Skissera kurvan

$$y = \frac{e^{-x^2}}{2x - 3}$$

i stora drag.

5. (a) Hur många rötter har ekvationen $e^x = 3x$?

   (b) Bestäm en av rötterna med ett fel som är högst $1/10000$.

6. I ett dataspel behöver vi en avbildning som roterar alla punkter i xy-planet $45°$ grader motsols i planet, samt lutar och förlänger vektorer parallella med z-axeln så att vektorn $(0, 0, 1)$ avbildas på $(2, 0, 2)$.
   Bestäm matrisen för den linjära avbildning som gör detta.
   Vad är bilden av vektorn $(1, 1, 1)$?

7. En bonde skall hägna in en $2400\,\mathrm{m}^2$ stor betesmark i form av en rektangel. Denna skall sedan delas på mitten genom ett stängsel som är parallellt med en av sidorna. Hur skall han göra det så att kostnaden för stängslet blir minimal?

8. Låt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & -5 \\ 2 & 4 & -2 & -3 - k \\ -1 & -2 & 1 & k \end{bmatrix}.$$

   Bestäm för alla k

   (a) hur många linjärt oberoende kolonner matrisen A har och

   (b) alla lösningar till ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.