Matematik
Göteborgs universitet
J.Brasche,
H. Carlsson

Hjälpmedel: Typgodkänd räknedosa
Telefonvakt: Erik Broman
0740-459022

Analys och linjär algebra, del 2 (MAN140)
Tentamen den 18 december 2003, 8.45-13.45

Om inget annat anges, skall den fullständiga lösningen på uppgiften redovisas, inklusive räkningar, eventuella hänvisningar till satser och motiveringar. Varje uppgift ger maximalt tre poäng utan den första som ger fyra poäng.

1. På den här uppgiften skall du bara ge svar. (En poäng per deluppgift.)

   (a) Bestäm
$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x(1-\cos x)} \ .$$

   (b) Bestäm ett egenvärde till
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

   (c) Lös differentialekvationen
$$\begin{cases} y' - y = 1 \\ y(0) = 0 \ . \end{cases}$$

   (d) Vektorerna $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ är egenvektorer till en viss symmetrisk matris A som har tre olika egenvärden. Ange ytterligare en egenvektor som inte ligger i $\text{span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$.

2. Nedan ges sex påståenden. Avgör för vart och ett av dem om det är sant eller falskt. Rätt svar ger 0,5 poäng, fel svar -0,5 poäng och inget svar 0 poäng. Du kan inte få mindre än 0 poäng på hela uppgiften.

   (a) Låt W vara ett underrum av $\mathbb{R}^n$. Om $\mathbf{x}$ ligger i W och i $W^\perp$ så är $\mathbf{x} = 0$.

   (b) Serien
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$$
   är konvergent.

Vänd!

(c) Antag att $f(x)$ är en funktion som uppfyller att $f(0) = 1$ och $f'(x) \leq 1$ för alla x. Då gäller (alltid) att $f(10) \leq 11$.

(d) Låt W =span$\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_p\}$. Om $\mathbf{v}$ är ortogonal mot $\mathbf{u}_j$ för $j = 1,\ 2,\ ...\ ,\ p$ så ligger $\mathbf{v}$ i $W^{\perp}$.

(e)

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sin^2 x + e^x} dx \leq 1 \ .$$

(f) Om $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\ldots$, $\mathbf{u}_p$ spänner ett p – dimensionellt underrum av $\mathbb{R}^n$ så är de linjärt oberoende.

3. Beräkna den generaliserade integralen

$$\int_0^\infty x^7 e^{-x^4} dx \ .$$

4. Låt

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix},$$

Ange $\mathbf{v}$:s koordinater med avseende på basen $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$.

5. En funktion $y(t)$ uppfyller differentialekvationen $y' + 3t^2y^2 = 0$ och $y(0) = 1$. Vad är $y(2)$?

6.

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \\ 12 \end{bmatrix}.$$

a) Ange en ortogonalbas för V =span$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$.

b) Bestäm den punkt i V som ligger närmast $\mathbf{v}$.

c) Ange avståndet mellan $\mathbf{v}$ och V.

7. Tillståndet för ett visst system vid tidpunkt 0 är lika med $\mathbf{u}_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$. Om tillståndet vid tidpunkt t är lika med $\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$ så är tillståndet vid tidpunkten $t+1$ lika med $A \cdot \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$, där $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$. Bestäm systemets tillstånd vid tidpunkten $t = 27$.

8. En tank har formen av en cirkulär kon (med spetsen nedåt) med höjden 4 meter och radien 1 meter. Tanken kan tömmas genom en kran i spetsen. När vattenytans höjd är 1 meter tar det 10 minuter att tömma tanken. Hur lång tid tar det för vattnet att rinna ut när hela tanken är full?

   Antag att vattnet rinner ut med en hastighet som är proportionell mot kvadratroten ur vattenytans höjd. (Torricellis lag.)