Matematik
Göteborgs universitet

Analys och linjär algebra

Kortfattade lösningar till tentamen den 18 december 2003

1. (a) Taylorutvecklingarna av sinus och cosinus är $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + x^4 B_1(x), x \to 0$ och $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + x^3 B_2(x), x \to 0$. Så

$$\frac{x - \sin x}{x(1-\cos x)} = \frac{x^3/6 - x^4 B_1(x)}{x^3/2 - x^4 B_2(x)} = \frac{1/6 - xB_1(x)}{1/2 - xB_2(x)} \to \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}, x \to 0 \ .$$

   (b) Matrisens determinant är lika med noll ty matrisens andra rad är lika med två gånger matrisens första rad. Detta medför att matrisen inte är inverterbar. Alltså är 0 ett egenvärde till matrisen.

   (c) Eftersom $\int -1 dt = -t$ är den integrerande faktorn e^{-t}. Efter multiplikation får vi $(e^{-t}y)' = e^{-t}$ så $e^{-t}y = -e^{-t} + C$ eller $y = Ce^t - 1$. Begynnelsevillkoret ger $C = 1$ och vi får $y = e^t - 1$.

   (d) Egenvektorer till olika egenvärden till A är ortogonala mot varandra ty A är symmetrisk. $\mathbf{u}$ är ortogonal mot $\mathbf{u}_1$ och mot $\mathbf{u}_2$ om och endast $\mathbf{u} = [c, -c, 0]^T$ för något c. För varje $c \neq 0$ är därför $\mathbf{u} = [c, -c, 0]^T$ en egenvektor till A som inte ligger i span$\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$.

2. (a) Sant, ty $\mathbf{x}$ är ortogonal mot sig själv.

   (b) Falskt, ty för $n \geq 3$ är $\ln n \geq 1$ och alltså

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln n}{n} \geq \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty \ .$$

   (c) Sant. Vi har $f(10) - f(0) = \int_0^{10} f'(x)dx \leq \int_0^{10} 1\, dx = 10$ så $f(10) \leq f(0) + 10 = 11$.

   (d) Svar: Sant, ty $\mathbf{v} \cdot \sum_{j=1}^{p} c_j \mathbf{u}_j = \sum_{j=1}^{p} c_j \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_j = 0$.

   (e) Sant. Eftersom $\sin^2 x \geq 0$ får vi

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\sin^2 x + e^x} dx \leq \int_0^{\infty} \frac{1}{e^x} dx = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1 \ .$$

(f) Svar: Sant, se föreläsningen om underrum, baser, dimensioner.

3. Vi har

$$\int_0^\infty x^7 e^{-x^4} dx = \left[\begin{array}{ll} t = x^4 & dt = 4x^3 dx \\ 0 \to 0 & \infty \to \infty \end{array} \right] = \frac{1}{4} \int_0^\infty t e^{-t} dt = (PI)$$

$$= \frac{1}{4} \left([-te^{-t}]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-t} dt \right) = \frac{1}{4}\,.$$

4. Eftersom $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ och $\mathbf{u}_3$ är en ortogonalbas för $\mathbf{R}^3$ är $\mathbf{v}$:s koordinater lika med

$$\frac{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}_1|^2} = 3, \qquad \frac{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}_2|^2} = \frac{1}{2}, \qquad \frac{\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}_3|^2} = \frac{1}{2}.$$

5. Skriv ekvationen som $-\frac{dy}{y^2} = 3t^2 dt$. Vi får $\frac{1}{y} = \int -\frac{dy}{y^2} = \int 3t^2 dt = t^3 + C$. $t = 0$ ger $C = 1$ och för $t = 2$ får vi $\frac{1}{y(2)} = 8 + 1 = 9$ så $y(2) = \frac{1}{9}$.

6. a)

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1, \quad \mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1}{|\mathbf{u}_1|^2} \mathbf{u}_1 = [4, 3, 2, -4]^T.$$

b) och c) Låt $\hat{\mathbf{v}}$ vara den punkt i V som ligger närmast $\mathbf{v}$. Då gäller

$$\hat{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_1}{|\mathbf{u}_1|^2} \cdot \mathbf{u}_1 + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_2}{|\mathbf{u}_2|^2} \cdot \mathbf{u}_2 = \frac{60}{30} \cdot \mathbf{u}_1 + \frac{-45}{45} \cdot \mathbf{u}_2 = [-2, 1, 4, 12]^T.$$

Den punkt i V som ligger närmast $\mathbf{v}$ är alltså $\mathbf{v}$ själv. $\mathbf{v}$ ligger alltså i V och avståndet mellan $\mathbf{v}$ och V är lika med 0.

7. a) Vi beräknar först A:s egenvärden:

$$\det(A - \lambda \cdot I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 5 \\ 5 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2 \cdot \lambda - 24.$$

λ är ett egenvärde till A om och endast om λ är ett nollställe till det här karakteristiska polynomet, dvs om och endast om

$$\lambda = \lambda_1 = 1 + \sqrt{1 + 24} = 6 \text{ eller } \lambda = \lambda_2 = 1 - \sqrt{1 + 24} = -4.$$

b) Vi beräknar A:s egenvektorer.

Sätt

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

$$A \cdot \mathbf{u}_1 = \lambda_1 \cdot \mathbf{u}_1 \iff \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 6 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\iff$$

$$\begin{cases} x + 5y &= 6x \\ 5x + y &= 6y \end{cases}$$

$\mathbf{u}_1 = [1, 1]^T$ är alltså en egenvektor till A och $\lambda_1 = 6$.

Eftersom matrisen A är symmetrisk är egenvektorer till olika egenvektorer ortogonala mot varandra och $\mathbf{u}_2 = [1, -1]^T$ är en egenvektor till A och $\lambda_2 = -4$.

c) Vi skriver $\mathbf{u}_0 = [2, 3]^T$ på formen

$$[2, 3]^T = c_1 \cdot \mathbf{u}_1 + c_2 \cdot \mathbf{u}_2.$$

Eftersom $\mathbf{u}_1$ och $\mathbf{u}_2$ är ortogonala mot varandra gäller att

$$c_1 = \frac{\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{u}_1}{|\mathbf{u}_1|^2} = \frac{5}{2} \text{ och } c_2 = \frac{\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{u}_2}{|\mathbf{u}_2|^2} = \frac{-1}{2}.$$

Vi får alltså att

$$[2, 3]^T = 5/2 \cdot \mathbf{u}_1 - 1/2 \cdot \mathbf{u}_2. \tag{1}$$

d) Att A har egenvärdena $\lambda_1 = 6$ och $\lambda_2 = -4$, $\mathbf{u}_1 = [1, 1]^T$ och $\mathbf{u}_2 = [1, -1]^T$ är motsvarande egenvektorer och (1) medför att tillståndet vid tidpunkten $t = 27$ är lika med

$$c_1\lambda_1^{27}\mathbf{u}_1 + c_2\lambda_2^{27}\mathbf{u}_2 = 5/2 \cdot 6^{27} \cdot [1, 1]^T - 1/2 \cdot (-4)^{27} \cdot [1, -1]^T.$$

8. Låt $V(t)$ och $h(t)$ vara vattnets volym resp. vattenytans höjd vid tiden t. Vi "ställer klockan" så att vattnet börjar rinna ut när $t = 0$. Då tanken är "halvfylld" gäller

$$\begin{cases} V'(t) = -k\sqrt{h(t)}, \\ h(0) = 1 \text{ och } h(10) = 0\ . \end{cases}$$

Nu är $V(t) = Ch^3(t)$, (Man kan beräkna C ($C = \pi/16$) men värdet spelar ingen roll.) så $V'(t) = 3Ch^2(t)h'(t)$. Vi får $h^2h' = -K\sqrt{h}$ där $K = k/3C$ så $h^{3/2}dh = -Kdt$ och $\frac{2}{5}h^{5/2} = -Kt + C$. $t = 0$ ger $C = 2/5$ och $h(10) = 0$ ger $0 = -10K = 2/5$ så $K = 1/25$.

När tanken är full får vi som för den halfulla tanken att $h^{3/2} = -Kdt = -\frac{1}{25}dt$ och $\frac{2}{5}h^{5/2} = -\frac{1}{25}t + C$. Villkoret $h(0) = 4$ ger nu $C = \frac{2}{5}4^{5/2} = 64/5$. Till sist ger $h(t) = 0$ att $0 = -\frac{1}{25}t + \frac{64}{5}$ så $t = 5 \cdot 64 = 320$ minuter.