Matematik
Göteborgs universitet
J.Brasche,
H. Carlsson,
I. Gustafsson

Hjälpmedel: Typgodkänd räknedosa
Fomelsamling i numerisk analys
Telefonvakt: Erik Broman
0740-459022

Matematik med tillämpningar 1, del 2 (MAN100)
Tentamen den 18 december 2003, 8.45-13.45

Om inget annat anges, skall den fullständiga lösningen på uppgiften redovisas, inklusive räkningar, eventuella hänvisningar till satser och motiveringar. Varje uppgift ger maximalt tre poäng utom den första som ger fyra poäng.

1. På den här uppgiften skall du bara ge svar. (En poäng per deluppgift.)

   (a) Bestäm
   $$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x(1-\cos x)} .$$

   (b) Bestäm ett egenvärde till
   $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

   (c) Lös differentialekvationen
   $$\begin{cases} y' - y = 1 \\ y(0) = 0 . \end{cases}$$

   (d) Bestäm en kompakt QR-faktorisering till matrisen $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

2. Nedan ges sex påståenden. Avgör för vart och ett av dem om det är sant eller falskt. Rätt svar ger 0,5 poäng, fel svar -0,5 poäng och inget svar 0 poäng. Du kan inte få mindre än 0 poäng på hela uppgiften.

   (a) Låt W vara ett underrum av $\mathbb{R}^n$. Om $\mathbf{x}$ ligger i W och i $W^\perp$ så är $\mathbf{x} = 0$.

   (b) Serien
   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$$
   är konvergent.

Vänd!

(c) Polynomet $(x+1)(x-1)(x-2)(x-3)$ är interpolationspolynomet till punkterna (-1,0), (1,0), (2,0) och (3,0).

(d) Talen 123.45, 0.678901 och -0.000783 kan alla lagras exakt i flyttalssystemet (10,6,-4,4).

(e)
$$\int_0^\infty \frac{1}{\sin^2 x + e^x} dx \leq 1 \ .$$

(f) Om $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, ..., $\mathbf{u}_p$ spänner ett p – dimensionellt underrum av $\mathbb{R}^n$ så är de linjärt oberoende.

3. Beräkna den generaliserade integralen
$$\int_0^\infty x^7 e^{-x^4} dx \ .$$

4. Låt
$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix},$$
Ange $\mathbf{v}$:s koordinater med avseende på basen $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$.

5. En funktion $y(t)$ uppfyller differentialekvationen $y' = -y^3 + \ t$ med begynnelsevillkoret $y(0) = 1$. Beräkna en approximation till $y(1)$ med Eulers framåtmetod och steglängd $h = 0.5$.

6.
$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \\ 12 \end{bmatrix}.$$

a) Ange en ortogonalbas för V =span$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$.

b) Bestäm den punkt i V som ligger närmast $\mathbf{v}$.

c) Ange avståndet mellan $\mathbf{v}$ och V.

7. Beräkna en approximation till integralen $\int_1^2 \ f(x) \ dx$ där f går exakt genom punkterna (1,2), (1.25,3), (1.5,3.5), (1.75, 4.5) och (2,4). Använd trapetsformeln med steglängder 0.5 och 0.25. Ta fram ett extrapolerat värde enligt Richardsons teknik och uppskatta trunkeringsfelet.

8. En tank har formen av en cirkulär kon (med spetsen nedåt) med höjden 4 meter och radien 1 meter. Tanken kan tömmas genom en kran i spetsen. När vattenytans höjd är 1 meter tar det 10 minuter att tömma tanken. Hur lång tid tar det för vattnet att rinna ut när hela tanken är full?

   Antag att vattnet rinner ut med en hastighet som är proportionell mot kvadratroten ur vattenytans höjd. (Torricellis lag.)