Matematik
Göteborgs universitet

Matematik med tillämpningar 1, del 2

Kortfattade lösningar till tentamen den 18 december 2003

1. (a) Taylorutvecklingarna av sinus och cosinus är $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + x^4 B_1(x), x \to 0$ och $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + x^3 B_2(x), x \to 0$. Så
$$\frac{x - \sin x}{x(1-\cos x)} = \frac{x^3/6 - x^4 B_1(x)}{x^3/2 - x^4 B_2(x)} = \frac{1/6 - xB_1(x)}{1/2 - xB_2(x)} \to \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}, x \to 0 \; .$$
   (b) Matrisens determinant är lika med noll ty matrisens andra rad är lika med två gånger matrisens första rad. Detta medför att matrisen inte är inverterbar. Alltså är 0 ett egenvärde till matrisen.
   (c) Eftersom $\int -1dt = -t$ är den integrerande faktorn e^{-t}. Efter multiplikation får vi $(e^{-t}y)' = e^{-t}$ så $e^{-t}y = -e^{-t} + C$ eller $y = Ce^t - 1$. Begynnelsevillkoret ger $C = 1$ och vi får $y = e^t - 1$.
   (d) Kollonnerna i matrisen är ortogonala, behöver endast normeras:
$$Q = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} \end{bmatrix}.$$
   Sedan fås R genom matrismultiplikation $R = Q^T A = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{6} \end{bmatrix}$.

2. (a) Sant, ty $\mathbf{x}$ är ortogonal mot sig själv.
   (b) Falskt, ty för $n \geq 3$ är $\ln n \geq 1$ och alltså
$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln n}{n} \geq \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty \; .$$
   (c) Falskt. Interpolationpolynomet är nollpolynomet.
   (d) Sant, talen blir respektive $1.2345 \cdot 10^2$, $6.78901 \cdot 10^{-1}$ och $-7.83 \cdot 10^{-4}$
   (e) Sant. Eftersom $\sin^2 x \geq 0$ får vi
$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\sin^2 x + e^x} dx \leq \int_0^{\infty} \frac{1}{e^x} dx = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1 \; .$$

(f) Svar: Sant, se föreläsningen om underrum, baser, dimensioner.

3. Vi har

$$\int_0^\infty x^7 e^{-x^4} dx = \left[\begin{array}{ll} t = x^4 & dt = 4x^3 dx \\ 0 \to 0 & \infty \to \infty \end{array} \right] = \frac{1}{4} \int_0^\infty t e^{-t} dt = (PI)$$

$$= \frac{1}{4} \left([-te^{-t}]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-t} dt \right) = \frac{1}{4} \; .$$

4. Eftersom $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ och $\mathbf{u}_3$ är en ortogonalbas för $\mathbf{R}^3$ är $\mathbf{v}$:s koordinater lika med

$$\frac{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}_1|^2} = 3, \quad \frac{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}_2|^2} = \frac{1}{2}, \quad \frac{\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}_3|^2} = \frac{1}{2}.$$

5. $y_1 = 1 + \frac{1}{2}(-1+0) = \frac{1}{2}$, $y_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(-(\frac{1}{2})^3 + \frac{1}{2}) = \frac{11}{16}$.

6. a)

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1, \quad \mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1}{|\mathbf{u}_1|^2} \mathbf{u}_1 = [4, 3, 2, -4]^T.$$

b) och c) Låt $\hat{\mathbf{v}}$ vara den punkt i V som ligger närmast $\mathbf{v}$. Då gäller

$$\hat{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_1}{|\mathbf{u}_1|^2} \cdot \mathbf{u}_1 + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_2}{|\mathbf{u}_2|^2} \cdot \mathbf{u}_2 = \frac{60}{30} \cdot \mathbf{u}_1 + \frac{-45}{45} \cdot \mathbf{u}_2 = [-2, 1, 4, 12]^T.$$

Den punkt i V som ligger närmast $\mathbf{v}$ är alltså $\mathbf{v}$ själv. $\mathbf{v}$ ligger alltså i V och avståndet mellan $\mathbf{v}$ och V är lika med 0.

7. $T(0.5) = 0.5(1{+}3.5{+}2) = 3.25$, $T(0.25) = 0.25(1{+}3{+}3.5{+}4.5{+}2) = 3.5$
$T^{(2)}(0.25) = 3.5 + \frac{3.5-3.25}{3} = 3.5 + \frac{0.25}{3} = 3\frac{7}{12}$.
$\mid R_T \mid \leq \mid 3.5 - 3.25 \mid = 0.25$
Svar: $3\frac{7}{12} \pm \frac{1}{4}$.

8. Låt $V(t)$ och $h(t)$ vara vattnets volym resp. vattenytans höjd vid tiden t. Vi ”ställer klockan” så att vattnet börjar rinna ut när $t = 0$. Då tanken är ”halvfylld” gäller

$$\begin{cases} V'(t) = -k\sqrt{h(t)}, \\ h(0) = 1 \text{ och } h(10) = 0 \; . \end{cases}$$

Nu är $V(t) = Ch^3(t)$, (Man kan beräkna C ($C = \pi/16$) men värdet spelar ingen roll.) så $V'(t) = 3Ch^2(t)h'(t)$. Vi får $h^2 h' = -K\sqrt{h}$ där

$K = k/3C$ så $h^{3/2}dh = -Kdt$ och $\frac{2}{5}h^{5/2} = -Kt + C$. $t = 0$ ger $C = \frac{2}{5}$ och $h(10) = 0$ ger $0 = -10K = \frac{2}{5}$ så $K = \frac{1}{25}$.

När tanken är full får vi som för den halvfulla tanken att $h^{3/2} = -Kdt = -\frac{1}{25}dt$ och $\frac{2}{5}h^{5/2} = -\frac{1}{25}t + C$. Villkoret $h(0) = 4$ ger nu $C = \frac{2}{5}4^{5/2} = \frac{64}{5}$. Till sist ger $h(t) = 0$ att $0 = -\frac{1}{25}t = \frac{64}{5}$ så $t = 5 \cdot 64 =$ 320 minuter.