Matematik
Göteborgs universitet
J.Brasche,
H. Carlsson

Hjälpmedel: Typgodkänd räknedosa
Telefonvakt: Yosief Wondmagegne
0746-350646

Analys och linjär algebra, del 2 (MAN140)
Tentamen den 7 februari 2003, 8.45-13.45

Om inget annat anges, skall den fullständiga lösningen på uppgiften redovisas, inklusive räkningar, eventuella hänvisningar till satser och motiveringar. Varje uppgift ger maximalt tre poäng utan den första som ger fyra poäng.

1. På den här uppgiften skall du bara ge svar. (En poäng per deluppgift.)

   (a) Bestäm
   $$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{e^{x^2}-1} \ .$$

   (b) Bestäm ett egenvärde till
   $$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 4 \\ 2 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

   (c) Funktionen $y(x)$ uppfyller differentialekvationen
   $$\begin{cases} e^{-(x+y)}y' = 1 \\ y(0) = -1 \ . \end{cases}$$
   Bestäm $y(1)$.

   (d) Låt $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ 6 \end{bmatrix}$. Ange en vektor som är skild från noll och ortogonal mot $\mathbf{u}_1$ och $\mathbf{u}_2$.

2. Nedan ges sex påståenden. Avgör för vart och ett av dem om det är sant eller falskt. Rätt svar ger 0,5 poäng, fel svar -0,5 poäng och inget svar 0 poäng. Du kan inte få mindre än 0 poäng på hela uppgiften.

   (a) Om $\mathbf{x} \cdot \mathbf{z} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{z}$ för alla $\mathbf{z}$ så gäller $\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

   (b) Serien
   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$$
   är konvergent.

Vänd!

(c) Antag att $f(x)$ är en kontinuerlig funktion på $[0, 1]$ med $f(0) = 0$ och $f(1) = 1$. Då finns (minst) ett tal a som uppfyller $0 < a < 1$ och $f(a) = a$.

(d) Låt W =span$\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_p\}$. Om $\mathbf{v}$ är ortogonal mot $\mathbf{u}_j$ för $j = 1,\ 2,\ ...\ ,\ p$ så ligger $\mathbf{v}$ i $W^\perp$.

(e) Det finns en kontinuerlig funktion med definitionsmängd $\{x; 0 \leq x \leq 1\}$ och värdemängd $\mathbb{R}$.

(f) Om $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\ldots$, $\mathbf{u}_p$ är ortogonala mot varandra och alla vektorer är skilda från noll så är de linjärt oberoende.

3. Beräkna integralen

$$\int_0^{\pi^2} \sin \sqrt{x}\, dx\ .$$

4. Låt

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix},$$

Ange $\mathbf{v}$:s koordinater med avseende på basen $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$.

5. Lös differentialekvationen

$$\begin{cases} (1 + x^2)y' + 2xy = 1 \\ y(0) = 2\ . \end{cases}$$

6. Bestäm den inversa matrisen till

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

7. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$. Beräkna A:s egenvärden, en egenvektor till vart och ett egenvärde och $A^{27} \cdot [2, 3]^T$.

8. En natt upphörde värmesystemet plötsligt att fungera i ett hus med innertemperaturen 22°. Nästa morgon (kl 8^{00}) var temperaturen 18° och ett halvt dygn senare hade den sjunkit till 10°. När slutade värmesystemet att fungera?

   Antag att yttertemperaturen hela tiden var −10° och att temperatursänkningen var proportionell mot skillnaden mellan inner- och yttertemperaturen.