Matematik
Göteborgs universitet

Analys och linjär algebra, del 2 (MAN140)

Kortfattade lösningar till tentamen den 7 februari 2004

1. (a) Taylorutvecklingarna av exponentialfunktionen och cosinus är $e^x = 1 + x + x^2B_1(x), x \to 0$ och $\cos x = x - \frac{x^2}{2} + x^3B_2(x), x \to 0$. Så $e^{x^2} = 1 + x^2 + x^3B_3(x), x \to 0$ och vi får

$$\frac{1-\cos x}{e^{x^2}-1} = \frac{\frac{1}{2}x^2 + x^3B_2(x)}{x^2 + x^3B_3(x)} = \frac{\frac{1}{2} + xB_2(x)}{1 + xB_3(x)} \to \frac{1}{2}, x \to 0 \ .$$

   (b) Matrisens determinant är lika med noll ty matrisens tredje rad liknar en konstant gånger matrisens första rad. Detta medför att matrisen inte är inverterbar. Alltså är 0 ett egenvärde till matrisen.

   (c) Ekvationen kan skrivas $e^{-y}y' = e^x$ eller $e^{-y}dy = e^xdx$. Så

$$-e^{-y} = \int e^{-y}dy = \int e^xdx = e^x + C \ .$$

   $y(0) = -1$ ger $-e = 1 + C$ så $C = -e - 1$. Till sist får vi för $x = 1$ att

$$-e^{-y(1)} = e^1 + C = e - e - 1 = -1$$

   dvs. $y(1) = 0$.

   (d) $[x, y, z]^T \neq [0, 0, 0]^T$ uppfyller kraven om $6x + 6y + 6z = 0$ och $-6x - 6y + 12z = 0$. Adderar vi ekvationerna så får vi $z = 0$. T ex har då $[1, -1, 0]$ de önskade egenskaperna.

2. (a) Sant, ty $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ är ortogonal mot sig själv.

   (b) Sant. Eftersom $\frac{\ln n}{\sqrt{n}} \to 0, n \to \infty$, så gäller $\frac{\ln n}{\sqrt{n}} < 1$ och alltså $\frac{\ln n}{n^2} < \frac{1}{n^{3/2}}$ för stora n. Dessutom är $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} < \infty$ eftersom $\frac{3}{2} > 1$.

   (c) Falskt. Om t.ex. $f(x) = x^2$ så blir villkoret $a^2 = a$ som bara har lösningarna $a = 0$ och $a = 1$.

   (d) Sant, ty den distributiva lagen gäller för skalärprodukten.

(e) Falskt. En kontinuerlig funktion på ett slutet och begränsat intervall (som $[0,1]$) är begränsad.

(f) Svar: Sant, se föreläsningen om ortogonala system.

3. Vi har

$$\int_0^{\pi^2} \sin\sqrt{x}dx = \begin{bmatrix} t=\sqrt{x} & 0\to 0 \\ x=t^2 & \pi^2\to\pi \\ dx=2tdt & \end{bmatrix} = 2\int_0^{\pi} t\sin tdt = (PI)$$

$$= 2[-t\cos t]_0^{\pi} + 2\int_0^{\pi}\cos tdt = 2\pi\ .$$

4. Eftersom $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ och $\mathbf{u}_3$ är en ortogonalbas för $\mathbb{R}^3$ är $\mathbf{v}$:s koordinater lika med

$$\frac{\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}_1|^2}=6, \quad \frac{\mathbf{u}_2\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}_2|^2}=0, \quad \frac{\mathbf{u}_3\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}_3|^2}=2.$$

5. Vänsterledet kan skrivas $\Big((1+x^2)y\Big)'$ (om vi följer "receptet" och dividerar med $1+x^2$ ser vi att den integrerande faktorn är $1+x^2$) så vi får $(1+x^2)y=\int 1\,dx = x+C$. $y(0)=2$ ger $C=2$ och

$$y(x)=\frac{x+2}{1+x^2}\ .$$

6. Radreducering av matrisen $[A\ I]$ ger

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

A är alltså inverterbar och

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & -1 & -1 \\ -3 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

7. a) Vi beräknar först A:s egenvärden:

$$\det(A - \lambda \cdot I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 5 \\ 5 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2 \cdot \lambda - 24.$$

λ är ett egenvärde till A om och endast om λ är ett nollställe till det här karakteristiska polynomet, dvs om och endast om

$$\lambda = \lambda_1 = 1 + \sqrt{1+24} = 6 \text{ eller } \lambda = \lambda_2 = 1 - \sqrt{1+24} = -4.$$

b) Vi beräknar A:s egenvektorer.

Sätt

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

$$A \cdot \mathbf{u}_1 = \lambda_1 \cdot \mathbf{u}_1 \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 6 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} x + 5y & = & 6x \\ 5x + y & = & 6y \end{cases}$$

$\mathbf{u}_1 = [1,1]^T$ är alltså en egenvektor till A och $\lambda_1 = 6$.

Eftersom matrisen A är symmetrisk är egenvektorer till olika egenvärden ortogonala mot varandra och $\mathbf{u}_2 = [1,-1]^T$ är en egenvektor till A och $\lambda_2 = -4$.

c) Vi skriver $\mathbf{u}_0 = [2,3]^T$ på formen

$$[2,3]^T = c_1 \cdot \mathbf{u}_1 + c_2 \cdot \mathbf{u}_2.$$

Eftersom $\mathbf{u}_1$ och $\mathbf{u}_2$ är ortogonala mot varandra gäller att

$$c_1 = \frac{\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{u}_1}{|\mathbf{u}_1|^2} = \frac{5}{2} \text{ och } c_2 = \frac{\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{u}_2}{|\mathbf{u}_2|^2} = \frac{-1}{2}.$$

Vi får alltså att

$$[2,3]^T = 5/2 \cdot \mathbf{u}_1 - 1/2 \cdot \mathbf{u}_2. \tag{1}$$

d) Att A har egenvärdena $\lambda_1 = 6$ och $\lambda_2 = -4$, $\mathbf{u}_1 = [1,1]^T$ och $\mathbf{u}_2 = [1,-1]^T$ är motsvarande egenvektorer och (1) medför att $A^{27} \cdot [2,3]^T$ är lika med

$$c_1 \lambda_1^{27} \mathbf{u}_1 + c_2 \lambda_2^{27} \mathbf{u}_2 = 5/2 \cdot 6^{27} \cdot [1,1]^T - 1/2 \cdot (-4)^{27} \cdot [1,-1]^T.$$

8. Vi ställer klockan så att tiden för strömavbrottet är klockan 0 (tiden i timmar). Det gäller att bestämma t_0, den tid som motsvarar klockan 8^{00} på den vanliga tidsskalan. Låt $T(t)$ vara temperaturen vid tiden t. Då gäller

$$\begin{cases} T'(t) = -k(T(t) + 10) & (DE) \\ T(0) = 22 & (1) \\ T(t_0) = 18 & (2) \\ T(t_0 + 12) = 10 & (3) \; . \end{cases}$$

(DE) kan skrivas $\dfrac{dT}{T + 10} = -kdt$ så $\ln(T+10) = -kt+C$. Villkoret (1) ger $C = \ln 32$. Villkoren (2) och (3) ger sedan $kt_0 = \ln(32/28) = \ln(8/7)$ respektive $k(t_0 + 12) = \ln(32/20) = \ln(8/5)$. Vi får

$$\frac{t_0}{t_0 + 12} = \frac{\ln \frac{8}{7}}{\ln \frac{8}{5}} = A \text{ som ger } t_0 = \frac{12A}{1 - A} \approx 4,76 \; .$$

Så strömavbrottet inträffade $4,76$ timmar innan 8^{00} dvs. ungefär 3^{14}.