

Matematik
Göteborgs universitet
J.Brasche,
H. Carlsson,
I. Gustafsson

Hjälpmedel: Typgodkänd räknedosa
Fomelsamling i numerisk analys
Telefonvakt: Yosief Wondmagegne
0746-350646

Matematik med tillämpningar 1, del 2 (MAN100)

Tentamen den 7 februari 2004, 8.45-13.45

Om inget annat anges, skall den fullständiga lösningen på uppgiften redovisas, inklusive räkningar, eventuella hänvisningar till satser och motive-ringar. Varje uppgift ger maximalt tre poäng utom den första som ger fyra poäng.

1. På den här uppgiften skall du bara ge svar. (En poäng per deluppgift.)

(a) Bestäm

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{e^{x^2} - 1}.$$

(b) Bestäm ett egenvärde till

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 4 \\ 2 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

(c) Funktionen $y(x)$ uppfyller differentialekvationen

$$\begin{cases} e^{-(x+y)}y' = 1 \\ y(0) = -1. \end{cases}$$

Bestäm $y(1)$.

(d) Anta att $\arctan x$ approximeras med Taylorpolynomet av grad 3 nära $x = 0$. Beräkna bakåttelet i approximationen i punkten $x = 0.1$

2. Nedan ges sex påståenden. Avgör för vart och ett av dem om det är sant eller falskt. Rätt svar ger 0,5 poäng, fel svar -0,5 poäng och inget svar 0 poäng. Du kan inte få mindre än 0 poäng på hela uppgiften.

(a) Om $\mathbf{x} \cdot \mathbf{z} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{z}$ för alla \mathbf{z} så gäller $\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

(b) Serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$$

är konvergent.

Vänd!

- (c) $s = \begin{cases} x, & -1 \leq x \leq 0 \\ x^2 + x, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$ är en kvadratisk spline med nod i $x = 0$.
- (d) Newtons metod konvergerar kvadratisk mot en rot med multiplicitet $m = 2$.
- (e) Det finns en kontinuerlig funktion med definitionsmängd $\{x; 0 \leq x \leq 1\}$ och värdemängd \mathbb{R} .
- (f) Om $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_p$ är ortogonala mot varandra och alla vektorer är skilda från noll så är de linjärt oberoende.

3. Beräkna integralen

$$\int_0^{\pi^2} \sin \sqrt{x} dx .$$

4. Låt

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix},$$

Ange \mathbf{v} 's koordinater med avseende på basen $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$.

5. Bestäm en LU -faktorisering med pivotering till matrisen $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 4 & -2 & 2 \end{bmatrix}$.

6. Bestäm den inversa matrisen till

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

7. Betrakta en prediktor/korrektor-metod för begynnelsevärdesproblem: $y' = f(t, y)$, $y(0) = y_0$.

Låt prediktorn vara Eulers framåtmetod och korrektorn vara Eulers bakåtmetod.

a) Skriv upp metoden man får vid fixpunktsiteration i korrektorn. **(1p)**

b) Bestäm stabilitetsområdet för metoden om man itererar till konvergens i korrektorn. **(1p)**

c) Anta att man gör n iteration i korrektorn. Vilken approximationsordning får metoden då? **(1p)**

8. En natt upphörde värmesystemet plötsligt att fungera i ett hus med innertemperaturen 22° . Nästa morgon (kl 8⁰⁰) var temperaturen 18° och ett halvt dygn senare hade den sjunkit till 10° . När slutade värmesystemet att fungera?

Antag att yttertemperaturen hela tiden var -10° och att temperatur-sänkningen var proportionell mot skillnaden mellan inner- och yttertemperaturen.