Matematik
Göteborgs universitet

Matematik med tillämpningar 1, del 2

Kortfattade lösningar till tentamen den 7 februarir 2004

1. (a) Taylorutvecklingarna av exponentialfunktionen och cosinus är $e^x = 1 + x + x^2 B_1(x), x \to 0$ och $\cos x = x - \frac{x^2}{2} + x^3 B_2(x), x \to 0$. Så $e^{x^2} = 1 + x^2 + x^3 B_3(x), x \to 0$ och vi får

$$\frac{1 - \cos x}{e^{x^2} - 1} = \frac{\frac{1}{2}x^2 + x^3 B_2(x)}{x^2 + x^3 B_3(x)} = \frac{\frac{1}{2} + x B_2(x)}{1 + x B_3(x)} \to \frac{1}{2}, x \to 0 \ .$$

   (b) Matrisens determinant är lika med noll ty matrisens tredje rad liknar en konstant gånger matrisens första rad. Detta medför att matrisen inte är inverterbar. Alltså är 0 ett egenvärde till matrisen.

   (c) Ekvationen kan skrivas $e^{-y}y' = e^x$ eller $e^{-y}dy = e^x dx$. Så

$$-e^{-y} = \int e^{-y} dy = \int e^x dx = e^x + C \ .$$

   $y(0) = -1$ ger $-e = 1 + C$ så $C = -e - 1$. Till sist får vi för $x = 1$ att

$$-e^{-y(1)} = e^1 + C = e - e - 1 = -1$$

   dvs. $y(1) = 0$.

   (d) $\arctan(x) \approx x - \frac{x^3}{3}$. Bakåtfelet i $x = 0.1$ blir $\tan(0.1 - \frac{0.1^3}{3}) - 0.1 = -2.0057 \cdot 10^{-6}$.

2. (a) Sant, ty $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ är ortogonal mot sig själv.

   (b) Sant. Eftersom $\frac{\ln n}{\sqrt{n}} \to 0, n \to \infty$, så gäller $\frac{\ln n}{\sqrt{n}} < 1$ och alltså $\frac{\ln n}{n^2} < \frac{1}{n^{3/2}}$ för stora n. Dessutom är $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} < \infty$ eftersom $\frac{3}{2} > 1$.

   (c) Sant. Båda grenarna kvadratiska, funktionsvärden och derivator stämmer i noden.

   (d) Falskt. Newtons metod konvergerar linjärt för multipelrötter.

   (e) Falskt. En kontinuerlig funktion på ett slutet och begränsat intervall (som $[0, 1]$) är begränsad.

   (f) Svar: Sant, se föreläsningen om ortogonala system.

3. Vi har

$$\int_0^{\pi^2} \sin\sqrt{x}dx = \begin{bmatrix} t=\sqrt{x} & 0\to 0 \\ x=t^2 & \pi^2\to\pi \\ dx=2tdt & \end{bmatrix} = 2\int_0^{\pi} t\sin tdt = (PI)$$

$$= 2[-t\cos t]_0^{\pi} + 2\int_0^{\pi}\cos tdt = 2\pi\ .$$

4. Eftersom $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ och $\mathbf{u}_3$ är en ortogonalbas för $\mathbf{R}^3$ är $\mathbf{v}$:s koordinater lika med

$$\frac{\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}_1|^2}=6,\quad \frac{\mathbf{u}_2\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}_2|^2}=0,\quad \frac{\mathbf{u}_3\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}_3|^2}=2.$$

5. Pivotering med $P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ger $PA = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. Två stegs Gausselimination ger uppåt triangulär matris $U = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0.6 \end{bmatrix}$ och multiplikatorerna på plats ger den nedåt triangulära matrisen $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ 0 & 0.4 & 1 \end{bmatrix}$ så att $PA = LU$.

6. Radreducering av matrisen $[A\ I]$ ger

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

A är alltså inverterbar och

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & -1 & -1 \\ -3 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

7. **a)** Prediktor: $y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k)$.
Korrektor med fixpunktiteration: $y_{k+1}^{(l+1)} = y_k + hf(t_{k+1}, y_{k+1}^{(l)})$.
b) Då får vi Euler bakåt med stabilitetsområde: $\{x \in C; \mid z-1 \mid\geq 1\}$

(enligt kompendium och föreläsningar).

c) På testproblemet får vi $y_{k+1}^{(0)} = y_k + h\lambda y_k$, $y_{k+1}^{(1)} = y_k + h\lambda y_{k+1}^{(0)} = y_k + h\lambda(y_k + h\lambda y_k) = [1 + h\lambda + (h\lambda)^2]y_k$. Stämmer med två termers Taylorutveckling av $e^{h\lambda}$ dvs metoden har approximationsordning 1.

8. Vi ställer klockan så att tiden för strömavbrottet är klockan 0 (tiden i timmar). Det gäller att bestämma t_0, den tid som motsvarar klockan 8^{00} på den vanliga tidsskalan. Låt $T(t)$ vara temperaturen vid tiden t. Då gäller

$$\begin{cases} T'(t) = -k(T(t) + 10) & (DE) \\ T(0) = 22 & (1) \\ T(t_0) = 18 & (2) \\ T(t_0 + 12) = 10 & (3)\ . \end{cases}$$

(DE) kan skrivas $\dfrac{dT}{T + 10} = -kdt$ så $\ln(T+10) = -kt+C$. Villkoret (1) ger $C = \ln 32$. Villkoren (2) och (3) ger sedan $kt_0 = \ln(32/28) = \ln(8/7)$ respektive $k(t_0 + 12) = \ln(32/20) = \ln(8/5)$. Vi får

$$\frac{t_0}{t_0 + 12} = \frac{\ln \frac{8}{7}}{\ln \frac{8}{5}} = A \text{ som ger } t_0 = \frac{12A}{1 - A} \approx 4,76\ .$$

Så strömavbrottet inträffade $4,76$ timmar innan 8^{00} dvs. ungefär 3^{14}.