Matematik
Göteborgs universitet
J.Brasche,
H. Carlsson

Typgodkänd räknedosa
Telefonvakt: Yosief Wondmagegne
0740-350646

Analys och linjär algebra, del 2
MAN140 & MIN200
Tentamen den 19 december 2002, 8.45-13.45

Om inget annat anges, skall den fullständiga lösningen på uppgiften redovisas, inklusive räkningar, eventuella hänvisningar till satser och motiveringar. Varje uppgift ger maximalt tre poäng.

1. På den här uppgiften skall du bara ge svar. (En poäng per deluppgift.)

   (a) Bestäm
   $$\lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2} .$$

   (b) Den symmetriska 3×3 – matrisen A har egenvärdena 3, 5 och 9 och vektorerna $\mathbf{u}= [1, 2, 5]^T$ och $\mathbf{v}= [1, 2, -1]^T$ är egenvektorerna till 3 och 5. Ange en egenvektor till 9.

   (c) Bestäm volymen av den skål som bildas då kurvan $y = x^4$, $0 \leq x \leq 1$, roterar kring y-axeln.

2. Nedan ges sex påståenden. Avgör för vart och ett av dem om det är sant eller falskt. Rätt svar ger 0,5 poäng, fel svar -0,5 poäng och inget svar 0 poäng. Du kan inte få mindre än 0 poäng på hela uppgiften.

   I den här uppgiften betecknar A hela tiden matrisen
   $$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & 8 \\ 5 & 2 & 8 & 6 \end{bmatrix} .$$

   (a) A har endast reella egenvärden.

   (b) Funktionen $y = x \sin x$ är en lösning till differentialekvationen $y'' + y = 2 \cos x$.

   (c) A har 4 linjärt oberoende egenvektorer.

   (d) Serien
   $$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
   är konvergent.

   (e) Egenvektorer till olika egenvärden till A är ortogonala.

   (f)
   $$\int_0^{\pi} \sin^{12} x dx > 2.$$

3. Låt

a) $$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ och b) $$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ange om matrisen A är diagonaliserbar. Om A är diagonaliserbar så diagonalisera A.

4. Bestäm en primitiv funktion till $x^3 \sin x^2$.

5. Bestäm funktionerna x och y som uppfyller

$$\begin{cases} x'(t) &= 3\,x(t) - y(t), \\ y'(t) &= -x(t) + 3\,y(t), \\ x(0) &= 3, \\ y(0) &= 5. \end{cases}$$

6. Lös differentialekvationen

$$\begin{cases} y' - xy = x \\ y(0) = 5. \end{cases}$$

7. Låt $\mathbf{u}_1 = [1, 1, 0, 0]^T$, $\mathbf{u}_2 = [1, -1, 1, 1]^T$, $\mathbf{u}_3 = [0, 0, 1, -1]^T$.
Låt $\mathbf{v} = [1, 2, 3, 4]^T$.

Bestäm punkten $\hat{\mathbf{v}} \in V = \text{span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ som ligger närmast $\mathbf{v}$. Ange också avståndet mellan $\mathbf{v}$ och V.

8. Ett (sfäriskt) hagelkorn tillväxer genom att vattenånga i molnet fastnar på haglets yta. Volymökningen hos haglet är proportionell mot hagelkornets area. Från början är hagelkornets volym $1\,\text{mm}^3$ och efter 15 minuter har den ökat till $2\,\text{mm}^3$. Hur lång tid tar det tills volymen har ökat till $3\,\text{mm}^3$?

Analys och linjär algebra, del 2
MAN140 & MIN200
Tentamen den 8 februari 2003, 8.45-13.45

Om inget annat anges, skall den fullständiga lösningen på uppgiften redovisas, inklusive räkningar, eventuella hänvisningar till satser och motiveringar. Varje uppgift ger maximalt tre poäng.

1. På den här uppgiften skall du bara ge svar. (En poäng per deluppgift.)

   (a) Lös differentialekvationen $y' = 2y,\ y(0) = 2$.

   (b) Bestäm tal c_1 och c_2 sådana att

   $$\begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 24 \end{bmatrix} = c_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + c_2 \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

   (c) Bestäm

   $$\int_0^{\pi^2} \sin \sqrt{x} dx \ .$$

2. Nedan ges sex påståenden. Avgör för vart och ett av dem om det är sant eller falskt. Rätt svar ger 0,5 poäng, fel svar -0,5 poäng och inget svar 0 poäng. Du kan inte få mindre än 0 poäng på hela uppgiften.

   (a) Egenvektorer till olika egenvärden till en symmetrisk matris är ortogonala.

   (b) Serien

   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$$

   är konvergent.

   (c) Varje symmetrisk matris är diagonaliserbar.

   (d) Det finns en kontinuerlig funktion med definitionsmängd $\{x; 0 < x < 1\}$ och värdemängd $\{x; 0 \leq x \leq 1\}$.

   (e) Nollvektorn är den enda vektor i $\mathbf{R}^n$ som är ortogonal mot varje vektor i $\mathbf{R}^n$.

   (f) Det finns en kontinuerlig funktion på $\mathbb{R}$ med precis ett nollställe vars derivata har precis fyra nollställen.

Vänd!

3. Bestäm egenvärden till matrisen A. För varje egenvärde ange en bas till det motsvarande egenrummet.

a) $$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$ b) $$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. Bestäm arean av det område i planet som uppfyller $\dfrac{1}{1+x} \leq y \leq \dfrac{x}{1+x^2}$ och $1 \leq x < \infty$.

5. Bestäm funktionerna x och y som uppfyller

$$\begin{cases} x'(t) &= x(t) + 2\,y(t), \\ y'(t) &= 2\,x(t) + y(t), \\ x(0) &= 6, \\ y(0) &= 2. \end{cases}$$

6. Bestäm

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x) \cdot (\sin x - x)}{\cos x^2 - e^{x^4}}.$$

7. Låt $\mathbf{u}_1 = [1, -1, 0, 0]^T$, $\mathbf{u}_2 = [0, 0, 1, 1]^T$.
   Låt $\mathbf{v} = [4, 2, 6, 0]^T$.

   Bestäm den punkt $\hat{\mathbf{v}} \in V = \text{span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ som ligger närmast $\mathbf{v}$. Ange också avståndet mellan $\mathbf{v}$ och V.

8. En natt upphörde värmesystemet plötsligt att fungera i ett hus med innertemperaturen 21°. Nästa morgon (kl 8^{00}) var temperaturen 20° och ett halvt dygn senare hade den sjunkit till 16°. När slutade värmesystemet att fungera?

   Antag att yttertemperaturen hela tiden var −5° och att temperatursänkningen var proportionell mot skillnaden mellan inner- och yttertemperaturen.

Analys och linjär algebra, del 2
MAN140 & MIN200

Tentamen den 13 augusti 2003, 8.45-13.45

Om inget annat anges, skall den fullständiga lösningen på uppgiften redovisas, inklusive räkningar, eventuella hänvisningar till satser och motiveringar. Varje uppgift ger sammanlagt maximalt 3 poäng utom uppgift 1 som kan ge 4 poäng.

1. På den här uppgiften skall du bara ge svar. (En poäng per deluppgift.)

   (a) Beräkna integralen
   $$\int_1^e x^2 \ln x \, dx.$$

   (b) Beräkna egenvärdena till matrisen
   $$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

   (c) MacLaurinutveckla $\sin(2x)$ upp till en felterm av ordning x^6.

   (d) Den symmetriska matrisen A har egenvärdena 0, 1 och 3. Dessutom gäller
   $$A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \text{ och } A \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$
   Bestäm en vektor $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ så att $A\mathbf{u} = 3\mathbf{u}$.

2. Nedan ges sex påståenden. Avgör för vart och ett av dem om det är sant eller falskt. Rätt svar ger 0,5 poäng, fel svar -0,5 poäng och inget svar 0 poäng. Du kan inte få mindre än 0 poäng på hela uppgiften.

   (a)
   $$\int_{-4\pi^2}^{4\pi^2} \sin^4(\sqrt{|x|}) \, dx = -\frac{\pi^3}{7}.$$

   (b) En deriverbar funktion är *alltid* kontinuerlig.

Vänd!

(c) Om A och B är $n \times n$-matriser är $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$.

(d) 0 är ett egenvärde till matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

(e) Om avståndet mellan vektorerna $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är lika med avståndet mellan $\mathbf{u}$ och $-\mathbf{v}$ så är $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ ortogonala.

(f)

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\arctan(k-1)}{k \ln k} < \infty.$$

3. Antag att en mystisk bil kör längs en rätlinjig väg i norrgående riktning. Dess position vid tiden t ges av funtionen $p(t) = \frac{t^2-2t+2}{t+1}$ under tiden $t = 0$ till $t = 10$ minuter. $p(t)$ anger, i km, bilens position norr om en fixerad referenspunkt. Beräkna både bilens sydligaste läge och dess medelhastigheten under tidsintervallet från 0 till 10 minuter.

4. Matrisen
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}$$
har egenvektorn $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Bestäm matrisens samtliga egenvärden och egenvektorer.

5. Vad blir volymen av den rotationskropp som fås då grafen till funktionen $f(x) = 2x^3$, $0 \le x \le 2$ roterar kring x-axeln?

6. Beräkna hur lång tid det tar för en partikel som färdas med farten 1 m/s längs kurvan given på parameterform $(x(t), y(t))$ där $x(t) = t$ och $y(t) = \frac{t^2}{4} - \frac{\ln t}{2}$. och där t går från 1 till 4 och där x och y är givna i meter.

7. Bestäm funktionerna x och y så att

$$\begin{cases} x'(t) = 5x(t) - 4y(t) \\ y'(t) = -4x(t) + 5y(t) \end{cases}$$

och $x(0) = 3$, $y(0) = 5$.

8. I produktionen i en viss fabrik har vi begränsningen att förhållandet mellan tre ingående ämnen x, y och z måste uppfylla $x + y - 2z = 0$. Alltså måste alltid (x, y, z) ligga i planet $\pi : x + y - 2z = 0$ i $\mathbb{R}^3$. När vi vill göra en blandning är vi därför tvungna att välja bästa approximationen, d.v.s närmsta punkten i planet.
För att automatisera detta vill vi ta fram matrisen för den ortogonala projektionen $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ på planet π. (2p)
Vilket är det kortaste avståndet från punkten $(0, 0, 1)$ till planet? (1p)