Matematik
Göteborgs universitet
J.Brasche,
H. Carlsson
I. Gustafsson

Formelblad numerisk analys
Typgodkänd räknedosa
Telefonvakt: Yosief Wondmagegne
0740-350646

Tillämpad matematik 1, del 2
MAN100

Tentamen den 19 december 2002, 8.45-13.45

Om inget annat anges, skall den fullständiga lösningen på uppgiften redovisas, inklusive räkningar, eventuella hänvisningar till satser och motiveringar. Varje uppgift ger maximalt tre poäng.

1. På den här uppgiften skall du bara ge svar. (En poäng per deluppgift.)

   (a) Bestäm
   $$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2} .$$

   (b) Den symmetriska 3×3 – matrisen A har egenvärdena 3, 5 och 9 och vektorerna $\mathbf{u}= [1, 2, 5]^T$ och $\mathbf{v}= [1, 2, -1]^T$ är egenvektorerna till 3 och 5. Ange en egenvektor till 9.

   (c) Bestäm en approximation till $\int_0^2 x^4 \, dx$ med Simpsons formel och steglängd $h = 1$. Ange felet i approximationen enligt felformeln.

2. Nedan ges sex påståenden. Avgör för vart och ett av dem om det är sant eller falskt. Rätt svar ger 0,5 poäng, fel svar -0,5 poäng och inget svar 0 poäng. Du kan inte få mindre än 0 poäng på hela uppgiften.

   I den här uppgiften betecknar A hela tiden matrisen
   $$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & 8 \\ 5 & 2 & 8 & 6 \end{bmatrix} .$$

   (a) Anta att $\arctan(x)$ approximeras med $x - \frac{x^3}{3}$ nära $x = 0$, dvs med Taylorpolynomet av grad 3. Bakåtfelet i approximationen i punkten $x = 0.1$ blir då $\tan(0.1 - \frac{(0.1)^3}{3}) - 0.1$ ($\approx -2 \cdot 10^{-6}$)

   (b) $s = \begin{cases} 1 + (x-1) + (x-1)^2 \ , & 0 \le x \le 1 \\ x \ , & 1 \le x \le 2 \end{cases}$ är en kvadratisk spline med knutpunkt i $(1,\ 1)$ och som interpolerar i punkterna $(0,\ 0)$, $(1,\ 1)$ och $(2,\ 3)$.

(c) A har 4 linjärt oberoende egenvektorer.

(d) Serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

är konvergent.

(e) Egenvektorer till olika egenvärden till A är ortogonala.

(f)

$$\int_0^{\pi} \sin^{12} x dx > 2.$$

3. Låt

$$\text{a)} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{och} \qquad \text{b)} \qquad A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ange om matrisen A är diagonaliserbar. Om A är diagonaliserbar så diagonalisera A.

4. Bestäm en primitiv funktion till $x^3 \sin x^2$.

5. Bestäm funktionerna x och y som uppfyller

$$\begin{cases} x'(t) &= 3\,x(t) - y(t), \\ y'(t) &= -x(t) + 3\,y(t), \\ x(0) &= 3, \\ y(0) &= 5. \end{cases}$$

6. Låt $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ och $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$.

(a) Lös ekvationssystemet $Ax = b$ i minstakvadratmening. **1p**

(b) Bestäm felet i lösningen i a)-uppgiften. **1p**

(c) Ange en kompakt QR-faktorisering av matrisen A. **1p**

7. OBS! Uppgifterna b) och c) kan lösas utan att ha löst uppgift a).

   (a) Betrakta differentialekvationen $y' = -2y^3, \quad y(0) = 1$. Använd Eulers bakåtmetod med steglängd $h = 0.1$ för att approximera lösningen i punkten $t = 0.1$. Visa att detta leder till en ekvation på form $0.2x^3 + x - 1 = 0$ att lösa. **1p**

   (b) Lös ekvationen i a)-uppgiften med Newtons metod och start i $x = 1$. Gör två iterationer och uppskatta felet. **1p**

   (c) Lös ekvationen i a)-uppgiften med fixpunktsiteration och start i $x = 1$. Gör så många iterationer så att Du kan visa att Du har tre korrekta decimaler i svaret. Utför det beviset. **1p**

8. Ett (sfäriskt) hagelkorn tillväxer genom att vattenånga i molnet fastnar på haglets yta. Volymökningen hos haglet är proportionell mot hagelkornets area. Från början är hagelkornets volym $1\,\mathrm{mm}^3$ och efter 15 minuter har den ökat till $2\,\mathrm{mm}^3$. Hur lång tid tar det tills volymen har ökat till $3\,\mathrm{mm}^3$?

Tillämpad matematik 1, del 2
MAN100
Tentamen den 8 februari 2003, 8.45-13.45

Om inget annat anges, skall den fullständiga lösningen på uppgiften redovisas, inklusive räkningar, eventuella hänvisningar till satser och motiveringar. Varje uppgift ger maximalt tre poäng.

1. På den här uppgiften skall du bara ge svar. (En poäng per deluppgift.)

   (a) Lös differentialekvationen $y' = 2y,\ y(0) = 2$.

   (b) Bestäm tal c_1 och c_2 sådana att

   $$\begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 24 \end{bmatrix} = c_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + c_2 \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

   (c) Beräkna en approximation till $\int_0^3 f(x)\,dx$ med hjälp av följande tabell och trapetsformeln.

x	0	1	2	3
f	0	1	1	-1

2. Nedan ges sex påståenden. Avgör för vart och ett av dem om det är sant eller falskt. Rätt svar ger 0,5 poäng, fel svar -0,5 poäng och inget svar 0 poäng. Du kan inte få mindre än 0 poäng på hela uppgiften.

   (a) Egenvektorer till olika egenvärden till en symmetrisk matris är ortogonala.

   (b) Serien
   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$$
   är konvergent.

   (c) $s = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 + 2(x-1) - \frac{3}{2}(x-1)^2, & 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$ är en kvadratisk spline med knutpunkt (nod) i $x = 1$ och som interpolerar tabellvärdena i uppgift 1 (c).

   (d) Det finns en kontinuerlig funktion med definitionsmängd $\{x; 0 < x < 1\}$ och värdemängd $\{x; 0 \leq x \leq 1\}$.

Vänd!

(e) Nollvektorn är den enda vektor i $\mathbf{R}^n$ som är ortogonal mot varje vektor i $\mathbf{R}^n$.

(f) Newtons metod konvergerar kvadratiskt mot roten $x^* = 2$ till ekvationen $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$.

3. Bestäm egenvärdena till matrisen A. För varje egenvärde ange en bas till det motsvarande egenrummet.

$$\text{a)} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \qquad\qquad \text{b)} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. Bestäm arean av det område i planet som uppfyller $\dfrac{1}{1+x} \leq y \leq \dfrac{x}{1+x^2}$ och $1 \leq x < \infty$.

5. Betrakta ekvationssystemet $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 2 \end{bmatrix}$. Ge en gräns för relativa felet i lösningen om man räknar med tre korrekta decimaler i $\sqrt{2}$.

6. Betrakta en första ordningens differentialekvation:
$y' = f(t, y),\ y(a) = c.$
(a) Härled Eulers framåtmetod från lämplig approximation av derivatan. (1p)
(b) Skriv upp den metod man får om man använder Eulers framåtmetod som prediktor och Eulers bakåtmetod som korrektor i en fixpunktsiteration. (2p)

7. Låt $\mathbf{u}_1 = [1, -1, 0, 0]^T$, $\mathbf{u}_2 = [0, 0, 1, 1]^T$.
Låt $\mathbf{v} = [4, 2, 6, 0]^T$.

Bestäm punkten $\hat{\mathbf{v}} \in V = \text{span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \}$ som ligger närmast $\mathbf{v}$. Ange också avståndet mellan $\mathbf{v}$ och V.

8. En natt upphörde värmesystemet plötsligt att fungera i ett hus med innertemperaturen 21°. Nästa morgon (kl 8^{00}) var temperaturen 20° och ett halvt dygn senare hade den sjunkit till 16°. När slutade värmesystemet att fungera?

Antag att yttertemperaturen hela tiden var $-5°$ och att temperatursänkningen var proportionell mot skillnaden mellan inner- och yttertemperaturen.

Matematik med tillämpningar 1, del 2
MAN100

Tentamen den 2 juni 2003, 8.45-13.45

Om inget annat anges, skall den fullständiga lösningen på uppgiften redovisas, inklusive räkningar, eventuella hänvisningar till satser och motiveringar. Varje uppgift ger sammanlagt maximalt 3 poäng utom uppgift 1 som kan ge 4 poäng.

1. På den här uppgiften skall du bara ge svar. (En poäng per deluppgift.)

   (a) Vad blir $||A||_\infty$ om

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix} ?$$

   (b) Bestäm egenvärdena till matrisen

   $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} .$$

   (c) Beräkna $\int_0^\pi \cos^2 x \, dx$ exakt.

   (d) Antag att A är en symmetrisk 3×3-matris med egenvärdena $2, 3$ och 5. Egenvektorerna till egenvärdena 2 och 3 är $(1, 0, -1)$ respektive $(1, -1, 1)$. Bestäm en egenvektor till egenvärdet 5.

2. Nedan ges sex påståenden. Avgör för vart och ett av dem om det är sant eller falskt. Rätt svar ger 0,5 poäng, fel svar -0,5 poäng och inget svar 0 poäng. Du kan inte få mindre än 0 poäng på hela uppgiften.

   (a) Om $f(x)$ är en linjär icke-konstant funktion konvergerar alltid Newtons metod mot den unika lösningen efter högst en iteration. Det vill säga $f(x_1) = 0$.

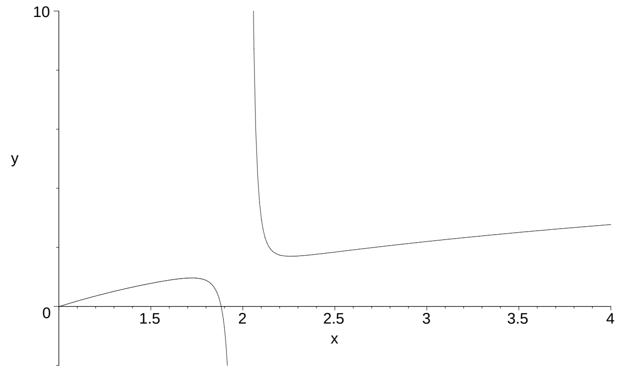
Vänd!

(b) Alla egenvärden till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

är reella.

(c) Figuren nedan visar grafen till funktionen $f(x) = \frac{3}{(x^3-8)^3}$.



(d) Ytan av en ellips med lillaxel 4 och storaxel 8 (t.ex. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$) är mindre än 16π.

(e) Vid centraldifferensapproximation av derivatan minskar funktionsfelet R_f i takt med h^2 där h står för steglängden.

(f) Vektorn $(4, 0, 1)$ är en egenvektor till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 12 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} .$$

3. Skissera grafen till funktionen $x \ln x$ över ett lämpligt intervall. Ange den naturliga definitionsmängden, eventuella lokala extrempunkter, konvexitet och eventuella asymptoter.

4. Hitta interpolationspolynomet (med lägst gradtal) som går genom punkterna $(1, 3), (2, 4)$ och $(3, -1)$.

5. Bestäm den räta linje som bäst ansluter till punkterna $(0, 0)$, $(1, 1)$ och $(2, 3)$.

6. En medicin injiceras kontinuerligt, med konstant hastighet, intravenöst genom dropp hos en patient. Samtidigt bryts medicinen ned med en hastighet som är proportionell mot koncentrationen av medicinen

i blodet. Ställ upp en differentialekvation som beskriver processen av koncentrationen av medicinen i blodet och lös den under förutsättning att vid tiden $t = 0$, då injiceringen började, var koncentrationen av medicinen i blodet noll. (Ange särskilt om koncentrationen går mot ett visst gränsvärde då $t \to \infty$.)

7. Bestäm den approximativa lösningen y_1 till differentialekvationen $y' = -3y$ med Euler bakåt och med steglängd $h = 1$, begynnelsevärde $y(0) = y_0 = 1$. Hur stort blir felet i approximationen jämfört med det exakta värdet?

8. I en sjö finns två sorters fiskar, rovfiskar och bytesfiskar. En föreslagen modell är att fiskebeståndet utvecklas enligt följande system

$$\begin{cases} R_{n+1} = 0,5R_n + 0,8B_n \\ B_{n+1} = -0,2R_n + 1,5B_n \end{cases}$$

där R_n betecknar antalet rovfiskar och B_n antalet bytesfiskar efter n år.

Vad händer med populationen i det långa loppet om det från början fanns 300 rovfiskar och 1400 bytesfiskar?

Matematik med tillämpningar 1, del 2
MAN100
Tentamen den 13 augusti 2003, 8.45-13.45

Om inget annat anges, skall den fullständiga lösningen på uppgiften redovisas, inklusive räkningar, eventuella hänvisningar till satser och motiveringar. Varje uppgift ger sammanlagt maximalt 3 poäng utom uppgift 1 som kan ge 4 poäng.

1. (a) Beräkna integralen
$$\int_1^e x^2 \ln x \, dx.$$
   (b) Beräkna egenvärdena till matrisen
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$
   (c) MacLaurinutveckla $\sin(2x)$ upp till en felterm av ordning x^6.
   (d) Låt $y' = -y^2 + 1$ och $y(0) = 0$. Beräkna approximationen av $y(1)$ givet av metoden "Euler framåt" med steglängd $h = \frac{1}{2}$.

2. Nedan ges sex påståenden. Avgör för vart och ett av dem om det är sant eller falskt. Rätt svar ger 0,5 poäng, fel svar -0,5 poäng och inget svar 0 poäng. Du kan inte få mindre än 0 poäng på hela uppgiften.
   (a)
$$\int_{-4\pi^2}^{4\pi^2} \sin^4(\sqrt{|x|}) \, dx = -\frac{\pi^3}{7}.$$
   (b) Konditionstalet κ för en funktionsbestämning av $f(x)$ kan approximeras med $\kappa \approx |x\frac{f'(x)}{f(x)}|$.
   (c) Givet n stycken punkter i planet, alla med olika x-koordinater, så finns det ett *unikt* polynom av grad $\leq n$ som går exakt igenom dessa punkter.

Vänd!

(d) 0 är ett egenvärde till matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

(e) Om A och B är $n \times n$-matriser är $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$.

(f)

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\arctan(k-1)}{k \ln k} < \infty.$$

3. Antag att en mystisk bil kör längs en rätlinjig väg i norrgående riktning. Dess position vid tiden t ges av $p(t) = \frac{t^2-2t+2}{t+1}$ under tiden $t = 0$ till $t = 10$ minuter. Funktionen $p(t)$ anger, i km, bilens position norr om en fixerad referenspunkt. Beräkna bilens sydligaste läge.

4. Matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}$$

har egenvektorn $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Bestäm matrisens samtliga egenvärden och egenvektorer.

5. Utnyttja Richardssonextrapolation och centraldifferens för att ge en bra approximation av $f'(6)$ då

t	4	5	6	7	8
x	9.501	11.124	12.214	13.890	15.982

6. Beräkna hur lång tid det tar för en partikel som färdas med farten 1 m/s längs kurvan given på parameterform $(x(t), y(t))$ där $x(t) = t$ och $y(t) = \frac{t^2}{4} - \frac{\ln t}{2}$. och där t går från 1 till 4 och där x och y är givna i meter.

7. Bestäm funktionerna x och y så att

$$\begin{cases} x'(t) = 5x(t) - 4y(t) \\ y'(t) = -4x(t) + 5y(t) \end{cases}$$

och $x(0) = 3$, $y(0) = 5$.

8. Hitta en funktion $f(x)$ som har följande egenskap. Om du använder trapetsregeln med steglängd 1 ($h = 1$) för att beräkna en approximation av integralen $\int_0^1 f(x)\,dx$ blir svaret exakt. Om man däremot aväncer Simpsons regel över samma intervall får vi att denna approximation ger ett absolut fel av storlek k, där $k > 0$.