Toner

En ton bestäms av

- frekvensen ν
- volymen
- klangfärgen

Kan man se tonens klangfärg?

Javisst. Akustiska svängningar kan omvandlas till elektriska svängningar. Dessa kan visas med hjälp av en oscilloskop.

Man ser en funktion f på skärmen. Funktionen är periodisk med perioden $T = 1/\nu$, dvs för alla t gäller

$$f(t + T) = f(t).$$

Funktionen f är så karakteristisk som ett fingeravtryck.

Hur analyserar man funktionen?

Först ett försök som inte fungerar

Vi kan ofta skriver funktionen f på följande sätt[1]:

$$\begin{aligned} f(t) &= c_0 + c_1 \cdot t + \\ &\quad c_2 \cdot t^2 + c_3 \cdot t^3 + \\ &\quad \ldots + \\ &\quad c_{1999} \cdot t^{1999} + c_{2000} \cdot t^{2000} + \\ &\quad \text{försumbar rest.} \end{aligned}$$

Talen c_0, c_1, c_2, …, c_{2000}, …, kallas för f:s Taylorkoefficienter.

Vi introducerar en vektor:

$$\mathbf{f}_{T,2000} = [c_0, \ldots, c_{2000}].$$

Betrakta nu två toner A och B. A och B skall ha samma frekvens och samma volym.

Vi kan försöka använda avståndet

$$|\mathbf{f}^A_{T,2000} - \mathbf{f}^B_{T,2000}|$$

som måt för skillnaden mellan klangfärgerna.

Det fungerar delvis.

[1] se sista sidan för ytterligare information

Är avståndet litet så liknar A:s klangfärg B:s klangfärg.

Å andra sidan kan A:s klangfärg likna B:s klangfärg fast avståndet

$$|\mathbf{f}^{A}_{T,2000} - \mathbf{f}^{B}_{T,2000}|$$

är stort.

Taylorutvecklingen är mycket viktig och mycket lämplig i många olika sammanhang men här fungerar den inte så bra.

Vi startar ett nytt försök

Funktionen f kan ofta skrivas på formen[2]

$$\begin{aligned} f(t) = {} & a_0 + \\ & a_1 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot \nu \cdot t) + \\ & a_2 \cdot \cos(2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot \nu \cdot t) + \\ & a_3 \cdot \cos(3 \cdot 2 \cdot \pi \cdot \nu \cdot t) + \\ & \ldots + \\ & a_{1000} \cdot \cos(1000 \cdot 2 \cdot \pi \cdot \nu \cdot t) + \\ & b_1 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot \nu \cdot t) + \\ & b_2 \cdot \sin(2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot \nu \cdot t) + \\ & b_3 \cdot \sin(3 \cdot 2 \cdot \pi \cdot \nu \cdot t) + \\ & \ldots + \\ & b_{1000} \cdot \sin(1000 \cdot 2 \cdot \pi \cdot \nu \cdot t) + \\ & \text{försumbar rest.} \end{aligned}$$

Talen a_0, a_1, a_2, …, b_1, b_2, … kallas f:s Fourierkoefficienter.

Vi introducerar en vektor:

$$\mathbf{f}_{F,1000} = [a_0, \ldots, a_{1000}, b_1, \ldots, b_{1000}].$$

[2]se sista sidan för ytterligare information

Betrakta nu två toner A och B. A och B skall ha samma frekvens och samma volym.

Vi kan försöka använda avståndet

$$|\mathbf{f}^A_{F,1000} - \mathbf{f}^B_{F,1000}|$$

som måt för skillnaden mellan klangfärgerna.

Den här gången fungerar det.

A:s klangfärg liknar B:s klangfärg om och endast om avståndet

$$|\mathbf{f}^A_{F,1000} - \mathbf{f}^B_{F,1000}|$$

är litet.

Istället av sinus och cosinus funktioner kan man använda många andra funktioner. Betraktar man endast ett begränsat tidsintervall (och det gör man praktiskt tagit alltid) så kan man även använda många olika icke – periodiska funktioner.

Ortogonala projektioner

Sinus och cosinus funktionen spelar inte bara en stor roll i teorien utan även i tekniken. Om någon ton A med frekvensen ν är given så kan man

- enkelt bestämma f^A:s Fourierkoefficienter och
- producera tonen dess funktion f^B är given av följande uttryck:

$$\begin{aligned} f^B(t) &= \sum_{n=0}^{1000} a_n^A \cdot \cos(n \cdot 2 \cdot \pi \cdot \nu \cdot t) \\ &\quad + \sum_{n=1}^{1000} b_n^A \cdot \sin(n \cdot 2 \cdot \pi \cdot \nu \cdot t). \end{aligned}$$

B:s klangfärg brukar likna A:s klangfärg väldigt mycket. På det här sättet kan man producera med elektroniska medel toner som liknar mycket "riktiga toner" som produceras av ett peano, en gitarr, osv. Dessutom kan man skapa "nya toner".

I senare kurser skall ni utvidga begreppet "vinkelrät" (ortogonal). Först har vi utvidgat begreppet så att även vektorer i det abstrakta n – dimensionella rummet $\mathbb{R}^n$ kan vara ortogonala mot varandra.

I senare kurser skall ni även definiera när två funktioner f och g är ortogonala mot varandra. Ni får se att funktionen f^B är f^A:s ortogonala projektion på ett visst underrum.

Något som redan nu kan diskuteras är följande. Låt, t ex, $\mathcal{F}_{20}$ vara mängden av alla funktioner f som kan skrivas på formen

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=0}^{20} a_n^A \cdot \cos(n \cdot 2 \cdot \pi \cdot \nu \cdot t) \\ &\quad + \sum_{n=1}^{20} b_n^A \cdot \sin(n \cdot 2 \cdot \pi \cdot \nu \cdot t). \end{aligned}$$

Låt V_{20} vara mängden av alla vektorer $\mathbf{f}_{F,1000}$ av sådana funktioner.

Låt nu A vara en godtycklig ton med frekvensen ν. Med hjälp av en frekvensfilter kan A omvandlas till en ton B i $\mathcal{F}_{20}$. B är den ton i $\mathcal{F}_{20}$ som "ligger närmast A" i meningen att skillnaden mellan B:s klangfärg och A:s klangfärg är minimal.

Man kan visa att $\mathbf{f}_{F,1000}^B$ är lika med $\mathbf{f}_{F,1000}^A$:s ortogonal projektion på V_{20}.

Några formler

Taylorkoefficienterna ges av

$$c_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Det gäller

$$f(t) = \sum_{k=0}^{N} c_k t^k + \frac{1}{N!} \int_0^t (t-s)^N f^{N+1}(s) ds.$$

Fourierkoefficienterna ges av

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt,$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(k \cdot 2 \cdot \pi \cdot \nu \cdot t) dt,$$

för $k = 1, 2, 3, \ldots$ och

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(k \cdot 2 \cdot \pi \cdot \nu \cdot t) dt,$$

för $k = 1, 2, 3, \ldots$ Det gäller

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos(k \cdot 2 \cdot \pi \cdot \nu \cdot t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k \cdot 2 \cdot \pi \cdot \nu \cdot t).$$