MATEMATIK
Göteborgs universitet

Tentamensskrivning i **MAN060 (MAL600) Elementär talteori, 5p**
2001-09-15, kl. 8.45-13.45, Inga hjälpmedel
Telefonvakt: Sebastian Sandberg 0740-350646

Uppgift 4 ger fyra poäng. Övriga uppgifter ger tre poäng vardera.

1. (a) Definiera vad det betyder att ett heltal är ett *primtal*.
   (b) Bevisa att $3, 5, 7$ är de enda primtalstrillingarna. Med andra ord, visa att om p, $p+2$ och $p+4$ är primtal så är $p = 3$.
   Ledning. Testa med små exempel!

2. Antag att a, b och m är heltal sådana att $m > 0$ och $a \equiv b \pmod{m}$. Visa att $(a, m) = 1$ om och endast om $(b, m) = 1$.

3. (a) Formulera Eulers sats.
   (b) Finn det minsta icke-negativa heltal x som uppfyller $x \equiv 64^{2001} \pmod{915}$.

4. Avgör om följande kongruenser är lösbara. Om ekvationen saknar lösning så visa detta. Om ekvationen är lösbar så bestäm lösningarna.
   (a) $x^2 \equiv 1 \pmod{105}$
   (b) $x^2 \equiv 11 \pmod{105}$

5. Visa att $\phi(\phi(n)) \leq \dfrac{n-1}{2}$ för varje heltal $n > 2$.
   Ledning. Visa först att $\phi(n)$ är jämnt för varje $n > 2$.

6. Låt p vara ett udda primtal. Visa att $\left(\dfrac{22}{p}\right) = \left(\dfrac{8p}{11}\right)$ om och endast om $p \equiv 5, 7 \pmod{8}$.

7. (a) Låt m vara ett positivt heltal och låt a vara ett heltal som är relativt primt med m. Definiera begreppet *ordning av a modulo m*.
   (b) Finn alla tal mellan 1 och 112 som har ordning 7 modulo 113.
   Ledning. Talet 3 är en primitiv rot modulo 113.

8. Visa att $(-2, 0)$, $(-1, 0)$ och $(0, 0)$ är de enda heltalslösningarna (x, y) till ekvationen
   $$y^2 = x(x+1)(x+2).$$
   Ledning.
   - Visa att det inte finns lösningar sådana att $x < -2$.
   - Undersök vilka gemensamma primfaktorer x, $x+1$ och $x+2$ kan ha för $x \geq 1$.
   - Dela upp i två fall: x jämnt, x udda.

> Tentan beräknas vara färdigrättad 2001-09-24. Rättade skrivningar kan hämtas i mottagningsrummet kl. 12.30-13.00 varje vardag. Resultat kan fås per telefon på nummer 772 3509 efter kl. 14.00 varje vardag.