MATEMATIK
Göteborgs universitet

Tentamensskrivning i **MAN060 (MAL600) Elementär talteori, 5p**
2002-01-03, kl. 8.45-13.45, Inga hjälpmedel
Telefonvakt: Anders Claesson 0740-350646

Uppgift 7 ger fyra poäng. Övriga uppgifter ger tre poäng vardera.

1. (a) Definiera vad *största gemensamma delaren* samt *minsta gemensamma multipeln* av två positiva heltal är.
   (b) Avgör om talen 4147 och 396231 är relativt prima.

2. Vilken är den minst signifikanta siffran i decimalutvecklingen av 17^{103}?

   Den minst signifikanta siffran i, t.ex., 138325 är 5.

3. Visa att $3p \mid 3^{p^2-1} + p^2 - 1$ för varje primtal $p \neq 3$.

4. Låt den aritmetiska funktionen λ vara definierad av $\lambda(1) = 1$ och
$$\lambda(p_1^{a_1} \cdots p_n^{a_n}) = (-1)^{a_1+\cdots+a_n}$$
   då $p_1, \ldots, p_n$ är olika primtal och $a_1, \ldots, a_n$ är positiva heltal. Visa att
   (a) λ är fullständigt multiplikativ.
   (b)
$$\sum_{d|n, d>0} \lambda(d) = \begin{cases} 1 & \text{om } n \text{ är en heltalskvadrat,} \\ 0 & \text{annars,} \end{cases}$$
   för alla positiva heltal n.

   En heltalskvadrat är ett tal på formen x^2, där x är ett heltal.

5. Låt p vara ett udda primtal. Visa att rs inte kan vara en primitiv rot modulo p om r och s är primitiva rötter modulo p.

6. (a) Definiera *Legendresymbolen*.
   (b) Avgör om kongruensen $x^2 \equiv 518 \pmod{787}$ är lösbar. Om den är det, bestäm en lösning.

   787 är ett primtal och $518 = 2 \cdot 7 \cdot 37$.

7. Avgör för var och en av följande diofantiska ekvationer hurvida ekvationen är lösbar eller ej. Om den är lösbar, bestäm en lösning; om den inte är det, visa detta.
   (a) $2x + 3y + 4z = 11$
   (b) $4x^2 - y^2 = 9$

8. Låt n vara ett positivt heltal. Visa att det finns ett *positivt* heltal x sådant att vart och ett av talen
$$x + 1,\ 2x + 1,\ 3x + 1,\ \ldots,\ nx + 1$$
   är delbart med någon heltalskvadrat, med andra ord att det för varje $k \in \{1, 2, \ldots n\}$ finns ett heltal y_k sådant att $y_k^2 \mid kx + 1$.

Tentan beräknas vara färdigrättad 2002-01-11. Rättade skrivningar kan hämtas i mottagningsrummet kl. 12.30-13.00 varje vardag. Resultat kan fås per telefon på nummer 772 3593 efter kl. 14.00 varje vardag.