Lösningar till inlämningsuppgifterna, omgång 1

Elementär talteori
Sommaren 2003

Uppgift 1. Vi skall visa att $\frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$ är heltal, dvs. att $6 \mid 2n^3 - 3n^2 + n$. Observera att $2n^3 - 3n^2 + n = n(n-1)(2n-1)$ så om $n \equiv 0, 1, 2, 3, 4, 5 \pmod 6$ respektive, så är

$$\begin{cases} 2n^3 - 3n^2 + n = n(n-1)(2n-1) \equiv 0 \pmod 6 \\ 2n^3 - 3n^2 + n = n(n-1)(2n-1) \equiv 0 \pmod 6 \\ 2n^3 - 3n^2 + n = n(n-1)(2n-1) \equiv 2 \cdot 1 \cdot 3 \pmod 6 \equiv 0 \pmod 6 \\ 2n^3 - 3n^2 + n = n(n-1)(2n-1) \equiv 3 \cdot 2 \cdot 5 \pmod 6 \equiv 0 \pmod 6 \\ 2n^3 - 3n^2 + n = n(n-1)(2n-1) \equiv 4 \cdot 3 \cdot 7 \pmod 6 \equiv 0 \pmod 6 \\ 2n^3 - 3n^2 + n = n(n-1)(2n-1) \equiv 5 \cdot 4 \cdot 9 \pmod 6 \equiv 0 \pmod 6. \end{cases}$$

Alltså är $2n^3 - 3n^2 + n \equiv 0 \pmod 6$ och vi är klara.

Uppgift 2. Eftersom $8 \cdot 2^{2^n} + 1 > 3$ om $n \geq 1$ räcker det att kolla att $3 \mid 8 \cdot 2^{2^n} + 1$ för alla heltal $n \geq 1$, dvs. att $8 \cdot 2^{2^n} \equiv -1 \pmod 3$. Men $2 \equiv -1 \pmod 3$ så

$$8 \cdot 2^{2^n} \equiv 8 \cdot (-1)^{2^n} \pmod 3 \equiv 8 \pmod 3 \equiv -1 \pmod 3$$

och vi är klara.

Uppgift 3. Vet att ϕ och μ är multiplikativa så produkten $\phi\mu$ måste också vara det. Enligt en sats är därför även $F(n) = \sum_{d|n} \phi(d)\mu(d)$ multiplikativ. Vi beräknar $F(p^k)$ där p är ett primtal:

$$\begin{aligned} F(p^k) &= \sum_{d|p^k} \phi(d)\mu(d) \\ &= \phi(1)\mu(1) + \phi(p)\mu(p) + \phi(p^2)\mu(p^2) + \ldots + \phi(p^k)\mu(p^k) \\ &= \phi(1)\mu(1) + \phi(p)\mu(p) \\ &= 1 - (p-1) = 2 - p. \end{aligned}$$

Låt nu n vara ett heltal och $n = p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r}$ dess primfaktorisering. Eftersom F är multiplikativ får vi av räkningen ovan att

$$F(n) = F(p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r}) = F(p_1^{k_1}) \cdots F(p_r^{k_r}) = (2 - p_1) \cdots (2 - p_r).$$

Alltså är $F(n) = 0$ omm $p_j = 2$ för något $j = 1, \ldots, r$, dvs omm n är jämnt.

Uppgift 4. Eftersom $7 \nmid a$ gäller enligt Fermats lilla sats att $a^6 \equiv 1 \pmod{7}$, dvs att $7 \mid a^6 - 1$. Men $a^6 - 1 = (a^3 + 1)(a^3 - 1)$ så eftersom 7 är ett primtal måste $7 \mid a^3 + 1$ eller $7 \mid a^3 - 1$.

Uppgift 5. Ett av talen $p, p+1, p+2$ måste vara delbart med 3. Eftersom p och $p+2$ är primtal > 3 kan ingen av dessa vara delbara med 3 och följdaktligen måste 3 dela $p+1$. Alltså gäller att $9 \mid (p+1)^2 = p^2 + 2p + 1 = p(p+2) + 1 = pq + 1$, dvs $pq \equiv -1 \pmod{9}$.

Uppgift 6. Vi skall visa att

$$| \mu(n) | = \sum_{d|n} \mu(d) 2^{\omega(n/d)}.$$

Enligt Möbius inversionsformel är detta samma sak som att visa att

$$2^{\omega(n)} = \sum_{d|n} |\mu(d)|. \tag{1}$$

Men $|\mu|$ och 2^ω är multiplikativa (enkel koll) så det räcker att verifiera (1) för $n = 1$ och för $n = p^k$, en primtalspotens. Om $n = 1$ är $2^{\omega(n)} = 2^0 = 1$ och $\sum_{d|n} |\mu(d)| = \mu(1) = 1$ så det stämmer. Vi kollar för $n = p^k$:

$$2^{\omega(p^k)} = 2^1 = 2$$

och

$$\begin{aligned} \sum_{d|p^k} |\mu(d)| &= |\mu(1)| + |\mu(p)| + |\mu(p^2)| + \ldots + |\mu(p^k)| \\ &= |\mu(1)| + |\mu(p)| = 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

så (1) gäller för primtalspotenser och därmed för godtyckliga positiva heltal tack vare multiplikativiteten.

Uppgift 7. Vi visar att $(1+x)^n \geq 1+nx$ för reella tal $x \geq -1$ med induktion över n. Om $n = 1$ gäller olikheten trivialt. Antag att den gäller för $n = k$. Eftersom $1 + x \geq 0$ måste därför

$$(1+x)^{k+1} = (1+x)(1+x)^k \geq (1+x)(1+kx) = 1+(k+1)x+kx^2 \geq 1+(k+1)x.$$

Alltså är påståendet sant för $n = k+1$ givet att det är sant för $n = k$. Enligt induktionsprincipen är påståendet nu sant för alla heltal $n \geq 1$.

Uppgift 8. Om $\mathrm{SGD}(n! + 1, (n + 1)! + 1) > 1$ så finns ett primtal p så att $p \mid n!+1$ och $p \mid (n+1)!+1$. Alltså måste p dela $(n+1)!+1-(n!+1) = n \cdot n!$. Eftersom p är ett primtal måste nu p dela något av talen $2, 3, 4, \ldots, n$ så speciellt måste $p \mid n!$. Men då även $p \mid n! + 1$ följer att $p \mid 1$, vilket är en motsägelse. Slutsatsen blir alltså att $\mathrm{SGD}(n! + 1, (n + 1)! + 1) = 1$.