Inlämningsuppgifter, omgång II

Elementär Talteori
Sommaren 2003

Ni får gärna jobba ihop när ni löser inlämningsuppgifterna, men lösningarna måste ni själva skriva ned med era egna ord.

Deadline för dessa uppgifter är den 13:e augusti.

Uppgift 1. Hitta alla lösningar till kongruensekvationen

$$x^2 \equiv -251 \pmod{300}.$$

Uppgift 2. Låt p vara ett udda primtal, visa att

$$1^n + 2^n + \ldots + (p-1)^n \equiv \begin{cases} 0 \pmod{p} & \text{om } (p-1) \nmid n \\ -1 \pmod{p} & \text{om } (p-1) \mid n. \end{cases}$$

(Ledning: Om $(p-1) \nmid n$ och r är en primitiv rot till p så är vänsterledet kongruent med

$$1 + r^n + r^{2n} + \ldots r^{(p-2)n} = \frac{r^{(p-1)n} - 1}{r^n - 1}.$$

Observera att detta också måste visas.)

Uppgift 3. Hitta resten när man dividerar $70!/18$ med 71.

Uppgift 4. Visa att

a) 7 inte dividerar något tal på formen $2^n + 1$, där $n \geq 0$ och att

b) 7 delar oändligt många tal på formen $10^n + 3$, där $n \geq 0$.

Uppgift 5. Delar 97 talet $n^2 - 85$ för något val av $n \geq 1$.

Uppgift 6. 17 apor hade exakt lika många bananer var. De samlade ihop dem i 12 högar, varav 11 hade exakt lika många bananer och den tolfte hade 6 bananer. Senare dog en apa, och de kvarvarande 16 aporna kunde dela upp bananerna jämt mellan sig (dvs alla fick exakt lika många bananer). Hur många bananer måste de minst ha haft?

Fredrik Engström, email: `engstrom@math.chalmers.se`