MATEMATIK
Göteborgs Universitet

Tentamensskrivning i **Elementär talteori (MAN060), 5p**
2003–08–16, kl 8.45–13.45, Inga hjälpmedel
Telefonvakt: Linda Mattsson 0740–350646

Var god markera på tentaomslaget ifall du läser kursen inom lärarprogrammet eller ej. Uppgift fyra ger fyra poäng, de andra ger tre poäng. För G krävs 12 poäng, för VG 18 poäng.

1. Vad blir resten då 748^{217} delas med 135?

2. Lös följande två diofantiska ekvationer

   (a) $126x - 165y = 231$,

   (b) $70x + 75y = 137$.

3. Tre kyrkklockor i en kyrka slår till gudstjänst. Den första slår var fjärde, den andra var femte och den tredje var sjunde sekund. När den första börjar slå tar det tre sekunder innan den andra slår och sedan tar det ytterligare en sekund innan den tredje slår. Kommer de tre klockarna någonsin att slå exakt samtidigt? I så fall, hur många slag har den första klockan slagit innan detta inträffar?

4. Låt $p \geq 7$ vara ett primtal.

   (a) Visa att antingen 2, 5 eller 10 är en kvadratisk rest modulo p.

   (b) Visa att det finns två på varandra följande kvadratiska rester modulo p.

   (c) Visa att det finns två kvadratiska rester, modulo p, med differensen 2.

   Observera att 0 per definition ej är en kvadratisk rest.

5. Låt f och g vara två aritmetiska funktioner sådana att

   $$f(n) = \sum_{d|n} g(d).$$

   Uttryck $g(12)$ i termer av f. Möbius μ-funktion får ej ingå i svaret.

6. Visa att $3^{10} \equiv 1 \pmod{11}$ genom att genomföra beviset för Fermats lilla sats i detta specialfall.

7. (a) Givet två heltal a och b, inte båda noll, definiera största gemensamma delare av dessa tal, $\mathrm{SGD}(a, b)$.

   (b) Beräkna $\mathrm{SGD}(1872, 458)$ med hjälp av Euklides algoritm.

   (c) Förklara varför Euklides algoritm fungerar, det vill säga visa att om $a = bq + r$ så är $\mathrm{SGD}(a, b) = \mathrm{SGD}(b, r)$.

8. Bevisa eller motbevisa följande påstående: Produkten av två tal som båda kan skrivas som summan av tre heltalskvadrater kan också skrivas som summan av tre heltalskvadrater.

Tentan beräknas vara färdigrättad 2003–09–01. Rättade skrivningar kan hämtas i mottagningsrummet kl. 12.20–13.00 varje vardag. Resultatet kan fås per telefon på nummer 772 3509 efter kl. 14.00 varje vardag.

Lycka till!
Fredrik och Håkan.