MATEMATIK
Göteborgs universitet

Tentamensskrivning i **MAN060 (MAL600) Elementär talteori, 5p**
2001-08-11, kl. 8.45-13.45, Inga hjälpmedel
Telefonvakt: Yan Yubin 0740-350646

Uppgift 5 ger fyra poäng. Övriga uppgifter ger tre poäng vardera.

1. (a) Låt $x_1, \ldots, x_n$ vara heltal, inte alla lika med 0. Definiera begreppet största gemensamma delaren till $x_1, \ldots, x_n$. Definiera också vad det betyder att $x_1, \ldots, x_n$ är relativt prima.
   (b) Finns det sju relativt prima heltal sådana att inga två av talen är relativt prima? Motivera ditt svar!

2. (a) Bestäm alla lösningar $x, y \in \mathbb{Z}$ till den diofantiska ekvationen $6x + 11y = 3$.
   (b) Är kongruensen $6x \equiv 3 \pmod{11}$ lösbar? Om den är det, bestäm den minsta positiva lösningen $x \in \mathbb{Z}$.

3. Låt n vara ett heltal sådant att $4 \mid n - 3$. Visa att n inte kan skrivas som summan av två heltalskvadrater.

4. Avgör vilka av följande aritmetiska funktioner som är multiplikativa och bevisa dina påståenden:
$$\begin{aligned} g_1(n) &= 2\phi(n), \\ g_2(n) &= n\phi(n), \\ g_3(n) &= \sum_{d \mid n, d>0} \Big(\sum_{e \mid d, e>0} 1 \Big). \end{aligned}$$
   Anm: ϕ betecknar Eulers ϕ–funktion.

5. (a) Finns det något heltal x som uppfyller $2x^2 \equiv 1 \pmod{101}$?
   (b) Finns det något heltal x mellan 2 och 101 som uppfyller $x^{103} \equiv 1 \pmod{101}$?
   Motivera dina svar!

6. (a) Definiera begreppet primitiv rot och formulera satsen om primitiva rötter.
   (b) Hur många icke-kongruenta primitiva rötter finns det modulo 250? Om det finns någon, bestäm en.

7. Bevisa att $(p-1)! \equiv r^{p(p-1)/2} \pmod{p}$ där p är ett udda primtal och r är en primitiv rot modulo p.

8. Bestäm tre på varandra följande positiva heltal som vart och ett är delbart med en heltalskvadrat större än 1.

Tentan beräknas vara färdigrättad 2001-08-20. Rättade skrivningar kan hämtas i mottagningsrummet kl. 12.30-13.00 varje vardag. Resultat kan fås per telefon på nummer 772 3509 efter kl. 14.00 varje vardag.