MATEMATIK
Göteborgs Universitet

Tentamensskrivning i **Elementär talteori (MAN060), 5p**
2004–01–10, kl 8.45–13.45, Inga hjälpmedel
Telefonvakt: 0740–350646

Var god markera på tentaomslaget ifall du läser kursen inom lärarprogrammet eller ej. Uppgift sju ger fyra poäng, de andra ger tre poäng. För G krävs 12 poäng, för VG 18 poäng.

1. Visa att $7 \mid (3^{2n+1} + 2^{n+2})$ för all $n \geq 0$.

2. Är följande diofantiska ekvationer löbara?

   (a) $$21x + 51y + 39z = 581$$

   (b) $$x^2 - 221y^2 = 188$$

3. Lös (hitta alla lösningar till) följande kongruensekvationssystem.

$$\begin{cases} 2x \equiv 7 \pmod{9} \\ 3x \equiv 7 \pmod{11} \\ 4x \equiv 7 \pmod{25} \end{cases}$$

4. Hur många inkongruenta lösningar modulo 17 har de två kongruensekvationerna?

   (a) $$x^{12} \equiv 16 \pmod{17}$$

   (b) $$x^{12} \equiv 3 \pmod{17}$$

5. Visa att addition och multiplikation är väldefinierade som kongruensoperationer. Det vill säga, visa att om $a \equiv a' \pmod{n}$ och $b \equiv b' \pmod{n}$ så är $a + b \equiv a' + b' \pmod{n}$ och $ab \equiv a'b' \pmod{n}$.

6. Låt p vara ett udda primtal, a och b heltal så att $\mathrm{SGD}(a, b) = 1$ och

$$\sum_{n=1}^{p-1} \frac{1}{n} = \frac{a}{b}.$$

   Visa att $p|a$.

7. Visa att det finns oändligt många primtal på formen $4n+3$ genom att anta att det bara finns ändligt många sådana och kalla dem $p_1, p_2, \ldots, p_k$, där $p_1 = 3$. Visa sedan

   (a) att det finns ett primtal på formen $4n+3$ som delar $4(p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_k) + 3$ (observera att $p_1 = 3$ inte är med i produkten), och

   (b) dra slutsatsen att antagandet är absurt.

8. Finns det två rationella tal (bråktal) med nämnare 87 respektive 143 så att deras summa är $7/(87 \cdot 143)$. I så fall hitta två sådana tal.

Tentan beräknas vara färdigrättad 2004–02–01. Rättade skrivningar kan hämtas i mottagningsrummet kl. 12.20–13.00 varje vardag. Resultatet kan fås per telefon på nummer 772 3509 efter kl. 14.00 varje vardag.

Lycka till!
Fredrik och Håkan.