Lösningar till inlämningsuppgiften i Elementär talteori
Sommaren 2005

Göteborgs universitet
Matematik

1. Vi ska bestämma resten av 7^{2005} modulo 100. Eftersom $\phi(100) = \phi(4)\phi(25) = 2 \cdot 20 = 40$ så är $7^{40} \equiv 1 \pmod{100}$ enligt Eulers sats, och

$$7^{2005} = 7^{40 \cdot 50 + 5} \equiv 7^5 = 16807 \equiv 7 \pmod{100}.$$

De två sista siffrorna är därför 07.

2. Se boken.

3. Enligt Strayer 1.11 är $\mathrm{sgd}(m, n)$ en linjärkombination av m och n, och enligt Strayer 1.2 innebär förutsättningarna att d delar varje sådan linjärkombination.

4. Se boken.

5. Eftersom $\mathrm{sgd}(F_1, F_2) = \mathrm{sgd}(1, 1) = 1$ gäller påståendet för $n = 1$. Antag nu att påståendet gäller $n = k \geq 1$, så att $\mathrm{sgd}(F_k, F_{k+1}) = 1$. Då är

$$\mathrm{sgd}(F_{k+1}, F_{k+2}) = \mathrm{sgd}(F_{k+1}, F_k + F_{k+1}) = \mathrm{sgd}(F_{k+1}, F_k) = 1$$

(se Strayer 1.12 för den näst sista likheten), och påståendet är bevisat för $n = k + 1$. Enligt induktionsprincipen är påståendet sant för alla $n \geq 1$.