Tentamen i **MAN060 Elementär talteori, 5p** — Göteborgs universitet

Examinator och telefonvakt: Marcus Better 0762–721861 — Matematik

Inga hjälpmedel — 2005–08–12, kl 8:30–13:30

Varje uppgift är värd tre poäng. För godkänt krävs 12 poäng, för väl godkänt 18 poäng.

Tentamen kommer vara färdigrättad senast den 22 augusti. Därefter kan skrivningarna hämtas ut i mottagningsrummet (rum 1202D) vardagar kl. 12:30–13:00.

Lycka till!

---

1. Visa att för alla positiva heltal a och b gäller
$$ab = \operatorname{sgd}(a,b)\operatorname{mgm}(a,b).$$

2. Bestäm alla lösningar till den diofantiska ekvationen $1290x + 348y = 24$.

3. Finn alla heltal som är delbara med 4, men som ger rest 2 när man delar dem med 5 och 7.

4. Låt $m > 0$ och antag att s och t är två heltal som uppfyller $s^2 \equiv t^2 \pmod{m}$, $s \not\equiv t \pmod{m}$ och $s \not\equiv -t \pmod{m}$. Visa att m är sammansatt.

5. Låt a och b vara två positiva heltal. Låt $r \geq 0$ vara ett heltal sådant att $a \equiv r \pmod{b}$. Visa att
$$2^a - 1 \equiv 2^r - 1 \pmod{2^b - 1}.$$

6. Visa att om $n \geq 1$ så är $\sum_{d|n,\, d>0} \phi(d) = n$.

7. Låt $n = pq$ där p och q är två olika primtal. Vilket är det minsta positiva heltal m sådant att
$$a^m \equiv 1 \pmod{n}$$
för alla heltal a med $\operatorname{sgd}(a,n) = 1$?

8. Låt p vara ett udda primtal. Visa att
$$\left(\frac{-3}{p}\right) = \begin{cases} 1 & \text{om } p \equiv 1 \pmod{6} \\ -1 & \text{om } p \equiv -1 \pmod{6}. \end{cases}$$