Tentamen i Elementär talteori, 5p **21 sept 2007 8.30 – 13.30**

Examinator: Johan Berglind
Telefonvakt: Elin Götmark 076 – 272 18 61

Tillåtna hjälpmedel: typgodkänd räknedosa

Motivera lösningarna noggrant.

1. Bestäm alla heltal x sådana att $\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{5} \\ x \equiv 1 \pmod{6} \\ x \equiv 3 \pmod{7} \end{cases}$ **(3p)**

2. Visa att $2222^{5555} + 5555^{2222}$ är delbart med 7. **(3p)**

3. Låt (x, y, z) vara en primitiv pythagoreisk trippel, $x^2 + y^2 = z^2$.
Visa att xyz inte är $\equiv 0 \pmod{7}$ **(3p)**

4. Bestäm alla positiva heltal $x < 65$ sådana att $x^2 \equiv 49 \pmod{65}$ **(3p)**

5. Betrakta implikationen
$x^2 \equiv y^2 \pmod{n} \Rightarrow x \equiv y \pmod{n}$ *eller* $x \equiv -y \pmod{n}$
Visa att implikationen är sann om n är ett primtal.
Ange ett sammansatt tal n sådant att implikationen är falsk.
Vad händer om man lägger till förutsättningen $(x,n) = (y,n) = 1$? **(3p)**

6. Bestäm alla positiva heltal x och y sådana att $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{7}$. **(3p)**

7. Låt $\gamma(n)$ vara antalet heltal k med $1 \le k \le n$ sådana att $(k,n) = (k+1,n) = 1$.
Visa att om n är en primtalspotens, $n = p^a$, är $\gamma(n) = n\left(1 - \frac{2}{p}\right)$ **(3p)**

8. Låt n vara ett positivt heltal och $p = 2^n + 1$ ett primtal. Visa att varje kvadratisk icke-rest modulo p är en primitiv rot modulo p.

Visa omvändningen, det vill säga att om alla kvadratiska icke-rester är primitiva rötter måste p kunna skrivas $p = 2^n + 1$ **(4p)**