MAN 060 – Elementär talteori
Sommaren 2007

Inlämningsuppgifter

- Inlämningsuppgifterna är frivilliga och genererar bonuspoäng till ordinarie samt två efterföljande tentamenstillfällen.
- Lösningarna skall vara fullständiga och prydligt redovisade, med andra ord ej handskrivna.
- Lösningarna skall lämnas till läraren senast vid första föreläsningen efter sommaruppehållet, alltså 7 augusti 2007. Alternativt kan lösningarna skickas till Johan Berglind, Matematiska Vetenskaper, Chalmers tekniska högskola och Göteborgs universitet, 412 96 Göteborg.
- Det är naturligtvis tillåtet, och i någon mån önskvärt, att arbeta gemensamt med uppgifterna. Dock skall lösningarna redovisas individuellt.
- Tre korrekt lösta uppgifter ger en bonuspoäng. Fem korrekta lösningar ger två bonuspoäng. Fler korrekta och särskilt förtjänstfulla lösningar kan ge fler bonuspoäng, men dessa tillgodoräknas i så fall endast om man redan uppnått godkänt på tentamen.

Notera att svårighetsgraden varierar väsentligt mellan uppgifterna, samt att det i några fall kan krävas en del tunga beräkningar som inte bör göras för hand.

1. Om a och b är positiva heltal sådana att $(a,b)=1$, vilka värden kan $(a^2+b^2, a+b)$ anta?

2. Beräkna Legendre-symbolen $\left(\frac{35}{79}\right)$.

3. För att slippa räkna hela sin samling tärningar brukar Lisa ordna dem i olika långa rader och se hur många som blir över för varje radlängd.
Vid ett tillfälle blev tre tärningar över när varje rad innehöll fem tärningar, tre blev över även när raderna bestod av sex tärningar, en blev över när raderna var sju tärningar långa och det gick jämnt ut när varje rad innehöll elva tärningar.
Hur många tärningar hade Lisa vid detta tillfälle?

4. Låt p vara ett primtal och n ett godtyckligt positivt heltal.
Visa att n inte är delbart med p om och endast om $\Phi(np)=(p-1)\Phi(n)$

5. Bestäm alla positiva heltal m och n sådana att $m^n = n^m$.

6. Visa att $p(n)=\sum_{j=2}^{n}\left[\frac{(j-1)!+1}{j}-\left[\frac{(j-1)!}{j}\right]\right]$.

Här är $p(n)$ antalet primtal $\leq n$ och $[x]$ är heltalsdelen av x.

7. Doris och Filip kan inte komma överens och måste fatta ett beslut baserat på elektronisk slantsingling.
För detta ändamål väljer Doris i hemlighet de två primtalen 31 och 43 och skickar produkten 1333 till Filip. Efter en stunds grubblande svarar Filip med talet 669.
Vad gör Doris nu?
Ge exempel på hur Doris respektive Filip kan vinna slantsinglingen beroende på det okända val Filip har gjort och det Doris kommer att göra.

8. År 1588 hävdade Pietro Cataldi efter intensivt letande efter Mersenne-primtal att M_p var primtal för $p=17, 19, 23, 29, 31, 37$.
Cataldi var långt ifrån sanningen.
Visa med hjälp av faktoriseringsmetoden Pollard rho att M_{23} är sammansatt.

9. Följande är ett trevligt spel för två personer.
Man ställer en spelpjäs på en gitterpunkt i första kvadranten av ett vanligt tvådimensionellt koordinatsystem.
Spelarna turas om att flytta pjäsen.
Om den befinner sig i punkten (x, y) där $x \geq y$ kan den flyttas till någon av punkterna $(x-ty, y)$ där t är ett positivt heltal och $x-ty \geq 0$.
Om i stället $x \leq y$ är kan den flyttas till $(x, y-tx)$ med samma restriktioner.
Den spelare som flyttar pjäsen till någon av axlarna, dvs till $(0, y)$ eller $(x,0)$, vinner.

Visa att om pjäsens startposition är (a, b) kan den spelare som börjar partiet tvinga fram en vinst om $a=b$ eller om $a>\frac{1+\sqrt{5}}{2}b$.