MAN 060 – Elementär talteori
Sommaren 2007

Första övningstentamen 2007

Varje uppgift är värd tre poäng utom den sista som är värd fyra.
För godkänt krävs 12 poäng, för väl godkänt 18.

1. Bestäm alla heltal x sådana att $\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{2} \\ x \equiv 2 \pmod{3} \\ x \equiv 3 \pmod{5} \end{cases}$

2. Beräkna Legendre-symbolen $\left(\frac{15}{101}\right)$

3. Visa att det inte finns några positiva heltal n sådan att $f(n)=14$

4. Visa att det inte finns några primitiva pythagoreiska tripplar (x, y, z) med $x^2 + y^2 = z^2$ där z är delbart med 3.

5. För vilka primtal p finns det minst tre inkongruenta lösningar till $x^4 \equiv 1 \pmod{p}$?

6. Låt p vara ett udda primtal och a ett positivt heltal ej delbart med p. Bilda mängden $T = \left\{ a, 4a, 9a, \quad \dots \quad, \left(\frac{p-1}{2}\right)^2 a \right\}$. Visa att elementen i T alla är inkongruenta modulo p.

7. Antag att p är ett primtal och att $p = 2q+1$ där q är ett udda primtal, samt att a är ett heltal med $1 < a < p-1$. Visa att $p - a^2$ är en primitiv rot modulo p.

8. Låt $s(n)$ som vanligt beteckna summan av de positiva delarna till n. Ett positivt heltal n är ***superperfekt*** om $s(s(n)) = 2n$.

a) Visa att 16 är superperfekt.

b) Visa att varje jämnt superperfekt tal kan skrivas $n = 2^q$ där $2^{q+1} - 1$ är ett primtal.