MATEMATIK
Göteborgs Universitet
S.J,J.L.,J.S.

Datum: 2001-04-11
Hjälpmedel: Inga

Tid: 08.45-13.45
Telefonvakt: Jens Jonasson
Tel.: 0740-350646

Tentamensskrivning för kursen
Matematik för naturvetare 1 (MAN100), del 1

På uppgifterna 1 och 2 skall endast svar ges. På övriga uppgifter krävs fullständiga och motiverade lösningar.

1. (a) Låt A vara en $5 \times 6-$matris. Man vet att lösningsmängden till systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har dimensionen 4.
   Vad kan sägas om dimensionen av kolonnrummet till matrisen A?

   (b) Vad är derivatan av $\arctan(\ln x)$?

   (c) Betrakta uttrycket
   $$\frac{x^k}{k!} = \frac{x^k}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k}$$
   Om man beräknar täljaren och nämnaren var för sig och sedan dividerar, finns risk för overflow vid flyttalsberäkning. Föreslå ett alternativt sätt att beräkna uttrycket så att risken för overflow minskas!

   (d) Låt A vara en matris med tre kolonner, som vi betecknar $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$. Man vet att $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ om $\mathbf{x} = [1 \quad 2 \quad 3]^T$ och $\mathbf{b} = [3 \quad 2 \quad 1]^T$. Finn c_1, c_2, c_3 så att
   $$c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + c_3\mathbf{a}_3 = 2\mathbf{b}$$

   Endast svar krävs! (En poäng per deluppgift.) (4p)

2. Avgör för vart och ett av följande sex påståenden om det är sant eller falskt. Enbart svar skall ges, alltså ett rakt ja eller nej.

   (a) Det finns ett andragradspolynom $p(x)$ sådant att $p'(x) = 0$ saknar reella lösningar.

   (b) Varje homogent linjärt ekvationssystem med fler obekanta än ekvationer har oändligt många lösningar.

   (c) Låt A, B och C vara kvadratiska matriser av samma storlek. Om $AB = AC$ och om C är inverterbar så följer alltid att $B = C$!

   (d) Det finns en funktion f sådan att $f(x) < 1$ för alla reella tal och
   $$\lim_{x \to \infty} f(x) = 1.$$

   (e) Det finns en kontinuerlig funktion sådan att $f(-1) = f(1)$ och $f'(x) \neq 0$ i alla punkter x där f är deriverbar.

   (f) Om två vektorer $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ i $\mathbb{R}^n$ är linjärt oberoende, så är $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ och $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ också linjärt oberoende!

   Rätt svar ger 0.5 poäng, fel svar ger -0.5 poäng och inget svar ger 0 poäng, dock med den begränsningen att man inte kan få mindre än 0 poäng på hela uppgiften. (3p)

3. Bestäm andra kolonnen i inversen till matrisen
   $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$
   (3p)

4. Bestäm ekvationerna för tangenterna till kurvan

$$y = \frac{x}{x^2+1}$$

i de båda punkterna $(0,0)$ och $(1,\frac{1}{2})$. I vilken punkt skär de två tangenterna varandra? (3p)

5. Låt $f(x) = x^2 - 5x + 6 - \ln x$ för alla positiva tal x. Motivera noggrannt att f har precis ett nollställe mellan 1 och 2 och att derivatan f' har precis ett nollställe mellan 2 och 3. Har andraderivatan f'' några nollställen? (3p)

6. Sätt $\mathbf{u} = [1 \quad 1 \quad 2 \quad -2]^T$ och $\mathbf{v} = [-2 \quad 2 \quad 1 \quad 1]^T$ och sätt $W = \text{Span}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$. Finn den ortogonala projektionen av $[1 \quad 3 \quad 3 \quad 1]^T$ på rummet W. (3p)

7. (a) Betrakta funktionen $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$. Tag argumenten $x_1 = 2.00$ och $x_2 = 1.00$, båda korrekt avrundade. Hur noggrannt kan man bestämma $f(x_1)$ och $f(x_2)$? (1p)

   (b) Talen a, b, c och d finns lagrade i en dator med flyttalsaritmetik enligt IEEE-standard och med maskinnoggrannheten μ. Gör framåt och bakåtanalys av algoritmen att beräkna uttrycket

$$\frac{a-b}{c+d}, \quad c+d \neq 0$$

   (Bortse från högre ordningens feltermer!) (2p)

8. Vilken punkt på kurvan $(x,y,z) = (2t, t\sin t, t\cos t)$ där $t \in \mathbb{R}$, ligger närmast punkten $(1,0,0)$? Vilken punkt på kurvan ligger längst ifrån $(1,0,0)$? (3p)

Skrivningen beräknas vara färdigrättad den 26 april.
Resultaten anslås då i bottenvåningen på Matematiskt Centrum (MC).
Du kan också få veta resultatet genom att ringa nummer 772 35 09, efter kl. 14.
Din rättade skrivning kan hämtas efter angivet datum i mottagningsrummet
(MC rum 1202D) , måndag - fredag kl. 12.30 - 13