

**Matematik för naturvetare, 1 MAN100**

Tentamen 1 november 2000, 8.45-13.45

Om inget annat anges, skall den fullständiga lösningen på uppgiften redovisas, inklusive räkningar, eventuella hänvisningar till satser och motive-ringar. Alla uppgifter utom uppgift 6 ger sammanlagt 3 poäng.

1. På den här uppgiften skall du bara ge svar. (En poäng per deluppgift.)

- (a) Beräkna derivatan av funktionen  $\ln(\sqrt{1+x^2}-x)$  (och förenkla så långt som möjligt).
- (b) Beräkna  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^x$ .
- (c) Hitta en inverterbar linjär avbildning  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  så att

$$T \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

2. Nedan ges sex påståenden. Avgör för vart och ett av dem om det är sant eller falskt. Enbart svar skall ges. Rätt svar ger 0,5 poäng, fel svar -0,5 poäng och inget svar 0 poäng. Du kan inte få mindre än 0 poäng på hela uppgiften.

- (a) Det finns en kontinuerligt deriverbar funktion med fyra nollställen vars derivata har (precis) två nollställen.
- (b) Matrisen  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$  är inverterbar.
- (c) Det finns en kontinuerlig funktion med definitionsmängd  $\{x \in \mathbb{R}; 0 \leq x < 1\}$  och värdemängd  $\{x \in \mathbb{R}; 0 \leq x \leq 1\}$ .
- (d) Om  $A$  är en  $m \times n$  matris och  $B$  en  $n \times m$  matris så att  $AB = I_m$  är också  $BA = I_n$ .
- (e) Det finns en kontinuerligt deriverbar funktion på  $\mathbb{R}$  med  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = 1$  och  $f'(x) > 1$  för alla  $x$  med  $0 \leq x \leq 1$ ?
- (f) Dimensionen för nollrummet till  $4 \times 7$  matrisen  $A$  är 3. Ekvationen  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  är då lösbar för alla  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^4$ .

3. Vi står på en bergstopp med koordinaterna  $(-2, 1, 10)$  och observerar ett flygplan. Med hjälp av vår kompis på berget bredvid observerar vi att flygplanet rör sig på en linje som passerar genom punkterna  $(-13, -1, 15)$  och  $(-9, 2, 15)$ . Hur långt från oss kommer flygplanet befinna sig när det är närmast? (3p)
4. Bevisa ena implikationen (d.v.s ena riktningen) i följande sats. Du får inte hänvisa till andra satser i beviset. (3p)

**Sats.** En  $n \times n$  matris  $A$  är inverterbar om och endast om den är radekvivalent med enhetsmatrisen  $I_n$ .

5. Rita kurvan

$$y = \arctan\left(\frac{3x + 5}{x^2 - 1}\right)$$

i stora drag. (3p)

6. a) Betrakta funktionen  $f(x) = \cos(x)$  för  $x = 0.1$ . Ange hur känslig funktionsberäkningen är för störning i  $x$ -värdet. (1p)
- b) Betrakta approximationen  $f(x) \approx 1 - x^2/2$  för  $x$  nära 0. Ange framåt- och bakåt-felet då  $x = 0.1$  (1p)
- c) Betrakta algoritmen att beräkna  $1 - \frac{x^2}{2}$  i ett flyttalssystem med IEEE-standard. Gör framåt- och bakåt-analys av algoritmen. Ta hänsyn till att  $x$  måste lagras avrundat, talen 1 och 2 däremot lagras exakt. Ange, med tydlig motivering, om algoritmen är stabil eller inte. (2p)
7. I en viss elektrisk krets beskrivs spänningarna  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$  i tre olika mätpunkter genom sambandet

$$\mathbf{b} = A\mathbf{x}$$

där  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_5)$  är strömmarna i fem delar av kretsen, och

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 5 & -4 \\ 1 & 2 & 3 & 6 & -5 \\ -2 & -4 & -1 & -7 & 5 \end{bmatrix}.$$

(Negativa strömmar och spänningar svarar mot strömmar i motsatt riktning i kretsen, så detta är tillåtet.)

Är avbildningen  $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$  surjektiv, d.v.s går det att bestämma strömmarna så att vi får vilken uppsättning spänningar som helst?

Bestäm en bas för kolonnrummet till  $A$ . (3p)

8. En besökare på ett museum betraktar en tavla som är två meter hög och vars underkant hänger en meter ovanför hennes ögon. Hur långt från väggen skall hon stå för att se tavlan så bra som möjligt, dvs. så att synvinkeln  $\alpha$  blir så stor som möjligt? Hur stor blir vinkeln? (3p)

