Matematik
Göteborgs universitet
H. Carlsson,
I. Gustafsson,
N. Lindholm

Matematik för naturvetare, 1 MAN100
Lösningar till tentamen 1 november 2000

1. (a)
$$D\ln(\sqrt{1+x^2}-x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}-x}\left(\frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}-1\right)$$
$$= \frac{x-\sqrt{1+x^2}}{(\sqrt{1+x^2}-x)\sqrt{1+x^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

(b) $(\sin x)^x = \exp(\ln(\sin x)^x) = e^{x\ln(\sin x)}$. Men
$$x\ln(\sin x) = x\ln\left(\frac{\sin x}{x}x\right) = x\ln\frac{\sin x}{x} + x\ln x \to 0 \text{ då } x \to 0\ .$$
Så $(\sin x)^x \to e^0 = 1$ när $x \to 0$.

(c) Vi vill hitta en matris $A = [\ \mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \mathbf{a}_3\ ]$ så att
$$\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
och A är inverterbar, d.v.s att kolonnerna är linjärt oberoende. T.ex. kan vi låta första raden i A vara $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ och välja de återstående elementen i vektorn $\mathbf{a}_2$ och $\mathbf{a}_3$ som två linjärt oberoende vektorer i $\mathbb{R}^2$. Vi kan t.ex. ta $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Då får vi ta $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$, så att $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Ett annat sätt är att hitta en inverterbar matris så att
$$B\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$
och sedan svara med $A = B^{-1}$. En sådan B är lätt att hitta, för första kolonnen skall vara $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Vi kan till exempel ta
$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$
Då blir B^{-1} samma matris som ovan.

2. (a) Falskt.

   Enligt medelvärdessatsen har derivatan minst ett nollställe mellan två nollställen till f så derivatan har minst tre nollställen.

   (b) Falskt.

   (c) Sant.

   (d) Falskt. För ett exempel tag t.ex. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ och $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Då blir $AB = [1]$ och $BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

   (e) Falskt. Medelvärdessatsen ger $1 = f(1) - f(0) = f'(\xi)$ för något $0 < \xi < 1$.

   (f) Sant enligt Rang-satsen.

3. Låt $Q = (-2, 1, 10)$ vara våra koordinater, samt $P_0 = (-13, -1, 15)$ och $P_1 = (-9, 2, 15)$ planets två koordinater. Linjens ekvation blir

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \overrightarrow{OP_0} + t \cdot \overrightarrow{P_0P_1} \\ &= (-13, -1, 15) + t(4, 3, 0). \end{aligned}$$

   Avståndet från Q till en punkt $\mathbf{r}$ på linjen är $\|\mathbf{r} - \overrightarrow{OQ}\|$, men det är lättare att räkna på kvadraten på avståndet.

$$\begin{aligned} \|\mathbf{r} - \overrightarrow{OQ}\|^2 &= \|(-11, -2, 5) + t(4, 3, 0)\|^2 = (4t - 11)^2 + (3t - 2)^2 + 5^2 \\ &= 16t^2 - 88t + 121 + 9t^2 - 12t + 4 + 25 \\ &= 25t^2 - 100t + 150 = 25(t^2 - 4t + 6) \\ &= 25\left((t-2)^2 - 4 + 6\right) = 25\left((t-2)^2 + 2\right). \end{aligned}$$

   Detta blir som minst då $t = 2$. Då blir avståndet $\|\mathbf{r} - \overrightarrow{OQ}\| = \sqrt{50}$.

4. Se Sats 7 i kapitel 2 i Lay.

5. Låt $f(x) = \arctan\left(\dfrac{3x+5}{x^2-1}\right)$ och $g(x) = \dfrac{3x+5}{x^2-1}$. Eftersom arctan är en strängt växande funktion har f' och g' samma tecken. Men

$$g'(x) = \frac{3(x^2-1) - 2x(3x+5)}{(x^2-1)^2} =$$

$$-\frac{3}{x^2-1}(x^2 + \frac{10}{3}x + 1) = -\frac{3}{x^2-1}(x+3)(x+\frac{1}{3}) \ ,$$

så vi får följande teckentabell

Dessutom är $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) = \arctan 0 = 0$, $\lim_{x\to-1^-} f(x) = \lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{y\to\infty} \arctan y = \frac{\pi}{2}$ och $\lim_{x\to-1^+} f(x) = \lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{y\to-\infty} \arctan y = -\frac{\pi}{2}$. Så grafen blir

6. a) $\delta f \approx f'(x)\delta x = -\sin x \ \delta x$. $x = 0.1: \ \delta f \approx -\sin 0.1 \ \delta x \approx -0.1 \ \delta x$.

b) $f(x) \approx 1 - x^2/2$

Framåt: $1 - x^2/2 - \cos x$. $x = 0.1: \ 1 - 0.1^2/2 - \cos(0.1) \approx -4.17 \cdot 10^{-6}$

Bakåt: $f^{-1}(1 - x^2/2) - x = \arccos(1 - x^2/2) - x$.

$x = 0.1: \ \arccos(1 - 0.1^2/2) - 0.1 \approx 4.17 \cdot 10^{-5}$

c) $y = 1 - x^2/2$ i IEEE-standard.

Framåt: $\hat{y} = (1 - \frac{x^2}{2}(1+\epsilon_1)^2(1+\epsilon_2)(1+\epsilon_3))(1+\epsilon_4)$. Relativt fel $=$ $\frac{\epsilon_4 - \frac{x^2}{2}(2\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3+\epsilon_4)}{1-\frac{x^2}{2}}$ plus lägre ordnings termer. $|$ relativt fel $| \leq \frac{\mu + \frac{x^2}{2}5\mu}{|1-\frac{x^2}{2}|}$.

Bakåt: $\hat{y} = 1 + \epsilon_4 - \frac{x^2(1+\epsilon_1)^2(1+\epsilon_2)(1+\epsilon_4)}{2(1+\epsilon_3)^{-1}} = \hat{1} - \frac{\hat{x}^2}{\hat{2}}$ där

$\hat{1} = 1 + \epsilon_4$ med $\frac{\hat{1}-1}{1} = \epsilon_4$ och $| \frac{\hat{1}-1}{1} | \leq \mu$

$\hat{2} = 2(1+\epsilon_3)^{-1} \approx 2(1-\epsilon_3)$ med $\frac{\hat{2}-2}{2} \approx -\epsilon_3$ och $\mid \frac{\hat{2}-2}{2} \mid \leq \mu$
$\hat{x} = x(1+\epsilon_1)(1+\epsilon_2)^{1/2}(1+\epsilon_4)^{1/2} \approx x(1+\epsilon_1+\frac{1}{2}\epsilon_2+\frac{1}{2}\epsilon_4)$
med $\frac{\hat{x}-x}{x} \approx \epsilon_1+\frac{1}{2}\epsilon_2+\frac{1}{2}\epsilon_4$ och $\mid \frac{\hat{x}-x}{x} \mid \leq \mu+\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}\mu = 2\mu$
Små störningar dvs algoritmen är stabil.

7. Vi radreducerar A för att hitta en bas för kolonnrummet.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 5 & -4 \\ 1 & 2 & 3 & 6 & -5 \\ -2 & -4 & -1 & -7 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$
$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Kolonn ett och tre är pivotkolonner, så en bas för kolonnrummet ges av

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

En linjär avbildning är surjektiv om och endast om kolonnerna i matrisen spänner bildrummet. Kolonnrummet för A har dimension två, så kolonnerna spänner inte $\mathbb{R}^3$. Avbildningen är inte surjektiv.

8. Med beteckningar som i figuren har vi $\tan a = \dfrac{1}{x}$, $a = \arctan \dfrac{1}{x}$ och $\tan b = \dfrac{3}{x}$, $b = \arctan \dfrac{3}{x}$ där $x > 0$.
Så $\alpha = \alpha(x) = b - a = \arctan \dfrac{3}{x} - \arctan \dfrac{1}{x}$ och

$$\alpha'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{3}{x}\right)^2}\left(-\frac{3}{x^2}\right) - \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$
$$= \frac{1}{1+x^2} - \frac{3}{9+x^2} = \frac{2(3-x^2)}{(1+x^2)(9+x^2)} = \frac{2(\sqrt{3}-x)(\sqrt{3}+x)}{(1+x^2)(9+x^2)}.$$

Vi får

Tabellen visar att vinkeln blir maximal då $x = \sqrt{3}$ och då är

$$\alpha_{\max} = \arctan\sqrt{3} - \arctan\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}.$$