Matematik
Göteborgs universitet
J. Brasche,
H. Carlsson

Typgodkänd räknedosa.
Telefonvakt:
Robert Berman
0740-350646

Matematik för naturvetare, 1 MAN100

Tentamen 2 november 2001, 8.45-13.45

Om inget annat anges, skall den fullständiga lösningen på uppgiften redovisas, inklusive räkningar, eventuella hänvisningar till satser och motiveringar. Alla uppgifter ger maximalt 3 poäng utom uppgift 1 som kan ge 4 poäng.

1. På den här uppgiften skall du bara ge svar. (En poäng per deluppgift.)

   (a) Lös ekvationen $2^{2x+1} - 17 \cdot 2^x + 8 = 0$.

   (b) För vilket h saknar ekvationssystemet med totalmatrisen

   $$\begin{bmatrix} 1 & h & 3 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

   lösning?

   (c) Låt

   $$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

   Bestäm andra kolonnen i A^{-1}.

   (d) Beräkna (och förenkla) derivatan av funktionen

   $$\ln \frac{1+x^2}{1-x^2} \, .$$

2. Nedan ges sex påståenden. Avgör för vart och ett av dem om det är sant eller falskt. Enbart svar skall ges. Rätt svar ger 0,5 poäng, fel svar -0,5 poäng och inget svar 0 poäng. Du kan inte få mindre än 0 poäng på hela uppgiften.

   (a) Vektorerna $\mathbf{u}_1 = [1, 2]^T$, $\mathbf{u}_2 = [2, 3]^T$ och $\mathbf{u}_3 = [3, 4]^T$ är en bas för $\mathbb{R}^2$.

   (b) $\arctan(\tan x) = x$ för alla x där $\tan x$ är definierad.

   (c) Låt $\mathbf{u} = [-2, 3, -4]^T$. Då gäller $\mathbf{u}^T\,\mathbf{u} = \mathbf{u}\,\mathbf{u}^T$.

   (d) Det finns en kontinuerligt deriverbar funktion med $f(0) = 0$, $f(1) = 2$, $f(2) = 1$ och $f'(x) \neq 0$ för alla $0 < x < 2$.

   (e) Låt $\mathbf{v}_1 = [4, 0, 0]^T$, $\mathbf{v}_2 = [6, -5, 0]^T$, $\mathbf{v}_3 = [-3, 1, 2]^T$. Då gäller

   $$\text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\} = \mathbb{R}^3.$$

   (f) Om f är en deriverbar funktion med $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ så måste $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$.

Vänd!

3. Bestäm gränsvärdet av
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{e^x - 1} \ .$$

4. Är $\mathbf{b} = [3, 4, 5]^T$ en linjärkombination av $\mathbf{v}_1 = [1, -2, 2]^T$, $\mathbf{v}_2 = [0, 5, 5]^T$ och $\mathbf{v}_3 = [2, 0, 8]^T$?

5. Låt $\mathbf{b}_1 = [1, 5, 0]^T$, $\mathbf{b}_2 = [2, 3, 4]^T$ och $\mathbf{x} = [1, -9, 8]^T$. Låt $V = \text{span}\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$. Ange $\mathbf{x}$:s koordinater med avseende på basen $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ till V.

6. (a) Hur många rötter har ekvationen $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$?

   (b) Bestäm den största roten med fyra korrekta decimaler.

7. Vi definierar $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ genom
$$T(x_1, x_2) = (x_1 + 5x_2, -2x_1 - 9x_2).$$
Bevisa att T är inverterbar och ange en formel för T^{-1}.

8. En orienterare befinner sig i ett skogsparti som begränsas av en rak skogsväg. Han är på väg mot en kontroll som ligger vid vägen. Avståndet till vägen är 500 meter och fågelvägen till kontrollen är 1300 meter. På vägen springer orienteraren 1 km på fyra och en halv minut och i skogen tar det sju och en halv minut. Hur skall orienteraren springa och hur lång tid tar det för honom att komma till kontrollen?