Matematik för naturvetare 1
Tentamen 2 nov. 2001
Kortfattade lösningar

1. (a) Ekvationen kan skrivas $2 \cdot (2^x)^2 - 17 \cdot 2^x + 8 = 0$. Så med $y = 2^x$ får vi $2y^2 - 17y + 8 = 0$ som har rötterna $y = 8$ och $y = 1/2$, vilket ger $x = 3$ och $x = -1$.

   (b) Genom att addera två gånger den första raden till den andra får vi
$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & h & 3 \\ -2 & 2 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & h & 3 \\ 0 & 2+2h & 9 \end{array}\right]$$
Alltså saknas lösning då $2 + 2h = 0$ dvs. då $h = -1$.

   (c) Andra kolonnen fås genom att lösa följande ekvationsystem.
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 6 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{array}{c} \\ \text{-1}\cdot(1) \\ \text{-3}\cdot(1) \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -9 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{array}{c} \\ \\ \text{-2}\cdot(2) \end{array}$$
$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \sim \begin{array}{c} -5\cdot(3) \\ 5\cdot(3) \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$
Så andra kolonnen i A^{-1} är $[10, -9, -2]^T$.

   (d)
$$D \ln \frac{1+x^2}{1-x^2} = D(\ln(1+x^2) - \ln(1-x^2)) = \frac{2x}{1+x^2} + \frac{2x}{1-x^2}$$
$$= \frac{2x(1-x^2) + 2x(1+x^2)}{(1+x^2)(1-x^2)} = \frac{4x}{1-x^4}\ .$$

2. (a) Falskt. Tre vektorer i $\mathbb{R}^2$ är alltid linjärt beroende.

   (b) Falskt. Om t.ex. $x = \pi$ är $\tan x = 0$ och $\arctan(\tan x) = \arctan(0) = 0 \neq \pi = x$.

   (c) Falskt. $\mathbf{u}$ är 3×1, $\mathbf{u}^T$ är 1×3 så $\mathbf{u}^T\mathbf{u}$ är 1×1 och $\mathbf{u}\mathbf{u}^T$ är 3×3 så de kan inte vara lika.

   (d) Falskt. f antar sitt största värde på $0 \leq x \leq 2$. Det största värdet är minst 2 och antas alltså i en inre punkt a. I denna punkt gäller $f'(a) = 0$.

(e) Sant.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 & -3 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Matrisen har tre pivotelement och alltså är $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ och $\mathbf{v}_3$ tre linjärt oberoende vektorer och de spänner alltså $\mathbb{R}^3$.

(f) Falskt. Tag t.ex. $f(x) = \frac{1}{x}\sin x^2$. Då gäller $|\frac{1}{x}\sin x^2| \leq \frac{1}{x} \to 0$ då $x \to \infty$. Vidare är $f'(x) = 2\cos x^2 - \sin x^2/x^2$ som saknar gränsvärde då $x \to \infty$.

3.

$$\frac{\sin 2x}{e^x - 1} = \frac{2x\,\frac{\sin 2x}{2x}}{x\,\frac{e^x-1}{x}} = 2\,\frac{\frac{\sin 2x}{2x}}{\frac{e^x-1}{x}}\ .$$

Eftersom $\sin 2x/2x \to 1$ och $e^x - 1/x \to 1$ då $x \to 0$ får vi $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{e^x-1} = 2$.

4.

$$x_1 \cdot \mathbf{v}_1 + x_2 \cdot \mathbf{v}_2 + x_3 \cdot \mathbf{v}_3 = \mathbf{b}$$

om och endast om $[x_1, x_2, x_3]^T$ är en lösning till ekvationssystemet med totalmatrisen

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 0 & 4 \\ 2 & 5 & 8 & 5 \end{array}\right] \sim \begin{array}{c} \\ 2\cdot(1) \\ \text{-}2\cdot(1) \end{array} \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 4 & 10 \\ 0 & 5 & 4 & -1 \end{array}\right].$$

Den sista matrisen är uppenbart totalmatrisen för ett icke lösbart system. $\mathbf{b}$ kan alltså inte skrivas som linjär kombination av $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ och $\mathbf{v}_3$.

5. $\mathbf{x}$:s koordinater med avseende på basen $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ är lika med c_1, c_2 om och endast om $[c_1, c_2]^T$ är lösningen till ekvationssystemet med totalmatrisen

$$\left[\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & -9 \\ 0 & 4 & 8 \end{array}\right].$$

Genom att subtrahera fem gånger den första raden från den andra raden får vi

$$\left[\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -7 & -14 \\ 0 & 4 & 8 \end{array}\right],$$

alltså $c_2 = 2$ och $c_1 = -3$.

Anm. Koordinaterna får man ännu snabbare om man kollar på den 3:e komponenten i ekvationen,

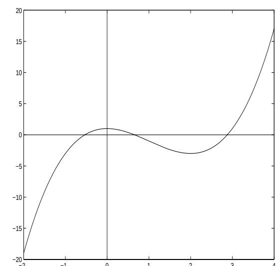
$$c_1 \cdot \mathbf{b}_1 + c_2 \cdot \mathbf{b}_2 = \mathbf{x}.$$

vilket ger $c_2 = 2$.

6. Låt $P(x) = x^3 - 3x^2 + 1$. Då är $P'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$. Vi får

x	0		2	
P' $+\ +\ +$	0	$-\ -\ -$	0	$+\ +\ +$
P $\nearrow$	max $= 1$	$\searrow$	min $= -3$	$\nearrow$

och



Figuren och tabellen visar att ekvationen har precis tre rötter. Eftersom $P(2) = -3 < 0$ och $P(3) = 1 > 0$, ligger den största roten, r, mellan 2 och 3.

Vi beräknar r med Newtons metod: Vi sätter

$$x_0 = 2,5$$

och sedan rekursivt

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 3x_n^2 + 1}{3x_n^2 - 6x_n}, \; n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Vi får

$$\begin{aligned} x_0 &\approx 2,50000 \\ x_1 &\approx 3,06666 \\ x_2 &\approx 2,90087 \\ x_3 &\approx 2,87971 \\ x_4 &\approx 2,87938 \\ x_5 &\approx 2,87938 \end{aligned}$$

Det verkar som om $r = 2,8794$ med fyra korrekta decimaler. För att bevisa det låter vi $x_- = 2,87935$ och $x_+ = 2,8794$. Då är $P(x_-) \approx -0,0003 < 0$ och $P(x_+) \approx 0,0001 > 0$. Så $x_- < r < x_+$ och alltså *är* $r = 2,8794$ med fyra korrekta decimaler.

7. T är linjär och T:s standardmatris är

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & -9 \end{bmatrix}.$$

Om A är inverterbar så är T orkså inverterbar och T^{-1} är den linjära avbildningen med standardmatrisen A^{-1}.

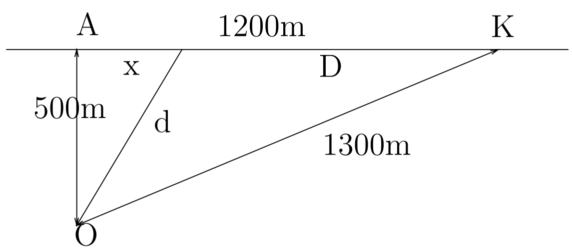
$$\left[\begin{array}{rr|rr} 1 & 5 & 1 & 0 \\ -2 & -9 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \quad 2\cdot(1) \quad \sim \left[\begin{array}{rr|rr} 1 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \quad \text{-5}\cdot(2) \quad \sim \left[\begin{array}{rr|rr} 1 & 0 & -9 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right].$$

Alltså är A inverterbar och

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -9 & -5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

8.



Pythagoras sats visar att sträckan AK är 1200 m=12/10 km. Med x som i figuren får vi, eftersom 500 m=1/2 km, att $d = \sqrt{1/2^2 + x^2}$ och $D = 12/10 - x$. Motsvarande tider är $t_1 = 7,5\sqrt{1/4 + x^2} = 15/2\sqrt{1/4 + x^2}$ och $t_2 = 4,5(12/10 - x) = 9/2(12/10 - x)$. Så

$$t(x) = \frac{15}{2}\sqrt{\frac{1}{4} + x^2} + \frac{9}{2}\left(\frac{12}{10} - x\right)$$

skall minimeras. Nu är

$$t'(x) = \frac{15}{2}\frac{x}{\sqrt{\frac{1}{4} + x^2}} - \frac{9}{2} = \frac{3}{2}\,\frac{5x - 3\sqrt{\frac{1}{4} + x^2}}{\sqrt{\frac{1}{4} + x^2}}\ .$$

Så $t'(x) = 0$ ger $5x = 3\sqrt{\frac{1}{4} + x^2}$, $25x^2 = 9\left(\frac{1}{4} + x^2\right)$, $16x^2 = \frac{9}{4}$, $x^2 = \frac{9}{4 \cdot 16}$ och $x = \frac{3}{2 \cdot 4} = \frac{3}{8}$. Vi får

x	0		$3/8$		$12/10$
t'		$-\ -\ -$	0	$+\ +\ +$	
t		$\searrow$	min	$\nearrow$	

Tabellen visar att tiden blir minimerad då $x = 3/8$ och då är

$$t = t(3/8) = \frac{15}{2}\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{9}{64}} + \frac{9}{2}\left(\frac{12}{10} - \frac{3}{8}\right) = \frac{15}{2}\sqrt{\frac{25}{64}} + \frac{9}{2} \cdot \frac{33}{40}$$

$$= \frac{15}{2} \cdot \frac{5}{8} + \frac{9 \cdot 33}{80} = \frac{15 \cdot 25 + 9 \cdot 33}{80} = \frac{672}{80} = \frac{84}{10}$$

Eftersom $3/8\,\text{km} = 375\ \text{m}$ skall orienteraren alltså springa till en punkt $1200 - 375 = 825\,\text{m}$ från kontrollen. Tiden blir $8,4$ minuter eller 8 minuter och 24 sekunder.