

Matematik  
Göteborgs universitet  
H. Carlsson,  
I. Gustafsson,  
N. Lindholm

Inga hjälpmedel,  
inte ens räknedosa  
Telefonvakt:  
Anders Öhgren  
0740-350646

**Matematik för naturvetare, 1**  
Tentamen den 5 januari 2001, 8.45-13.45

Om inget annat anges, skall den fullständiga lösningen på uppgiften redovisas, inklusive räkningar, eventuella hänvisningar till satser och motiveringar. Alla uppgifter utom uppgift 5 ger sammanlagt maximalt 3 poäng.

- (a) Man vet att en vinkel  $v$  ligger i första kvadranten ( $0 \leq v \leq \pi/2$ ) och att  $\tan v = \sqrt{7}$ . Bestäm  $\cos 2v$ .  
(b) Finns det något plan som innehåller både linjen

$$L_1 : (x, y, z) = (1, 2, 3) + s(1, 2, 0)$$

och

$$L_2 : (x, y, z) = (0, 3, -5) + t(1, -1, 1)?$$

Hitta ekvationen för planet eller motivera att något sådant plan inte finns.

- (c) Beräkna

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x^4 + 5x^2}.$$

2. Nedan ges 6 påståenden. Avgör för vart och ett av dem om det är sant eller falskt. Endast svar skall ges. Rätt svar ger 0,5 poäng, fel svar -0,5 poäng och inget svar 0 poäng. Du kan inte få mindre än 0 poäng på hela uppgiften.

- Låt  $f$  vara en deriverbar funktion. Antag att  $f$  har precis tre olika nollställen. Då har  $f'$  högst två olika nollställen.
- Om  $A$  är en  $n \times n$  matris och det finns en vektor  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  sådan att  $(A + A^2)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , så är inte  $A$  inverterbar.
- Om funktionen  $f^2$  är kontinuerlig så måste också funktionen  $f$  vara kontinuerlig.
- Linjen  $L : (x, y, z) = (1, -3, 0) + t(1, 2, 3)$  skär planet  $\pi : (x, y, z) = (1, 3, 2) + s(2, 1, 0) + t(3, 0, 2)$  i punkten  $(4, 3, 9)$ .
- Om  $f$  är en deriverbar funktion med  $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$  så måste  $f(x)$  ha ett gränsvärde då  $x \rightarrow \infty$ .
- Ekvationssystemet

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 - 4.3x_3 &= 1 \\3.3x_1 - 10.1x_2 + 5.2x_3 &= 4.4\end{aligned}$$

har en entydig lösning.

3. Formulera definitionen av rangen för en matris.  
Formulera och bevisa rangsatsen.

4. Skissera kurvan

$$y = \frac{e^{-x^2}}{2x - 3}$$

i stora drag.

5. a) Betrakta funktionen  $f(x) = e^x$  för  $x = 0.1$ . Ange hur känslig funktionsberäkningen är för störning i  $x$ -värdet. (1p)

b) Betrakta approximationen  $f(x) \approx 1 + x$  för  $x$  nära 0. Ange framåt- och bakåt-felet då  $x = 0.1$  (1p)

c) Betrakta algoritmen att beräkna  $1+x$  i ett flyttalssystem med IEEE-standard. Genomför framåt- och bakåt-analys av algoritmen. Ta hänsyn till att  $x$  måste lagras avrundat, talet 1 däremot lagras exakt. Ange, med tydlig motivering, om algoritmen är stabil eller inte. (2p)

6. I ett dataspel behöver vi en avbildning som roterar alla punkter i  $xy$ -planet  $45^\circ$  grader motsols i planet, samt lutar och förlänger vektorer parallella med  $z$ -axeln så att vektorn  $(0, 0, 1)$  avbildas på  $(2, 0, 2)$ . Bestäm matrisen för den linjära avbildning som gör detta. Vad är bilden av vektorn  $(1, 1, 1)$ ?

7. En bonde skall hägna in en  $2400 \text{ m}^2$  stor betesmark i form av en rektangel. Denna skall sedan delas på mitten genom ett stängsel som är parallellt med en av sidorna. Hur skall han göra det så att kostnaden för stängslet blir minimal?

8. Låt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & -5 \\ 2 & 4 & -2 & -3 - k \\ -1 & -2 & 1 & k \end{bmatrix}.$$

Bestäm för alla  $k$  rangen för  $A$  och en bas för nollrummet till  $A$ .