Matematik
Göteborgs universitet
H. Carlsson,
I. Gustafsson,
N. Lindholm

Matematik för naturvetare, 1 MAN100
Lösningar till tentamen 5 januari 2001

1. (a) Vi har $\tan v = \sin v / \cos v = \sqrt{7}$. Så $\sin^2 v = 7\cos^2 v = 7(1-\sin^2 v)$ eller $\sin^2 v = 7/8$. Detta ger $\cos 2v = \cos^2 v - \sin^2 v = 1 - 2\sin^2 v = 1 - 2 \cdot 7/8 = -3/4$.
   (b) Ett sådant plan måste innehålla punkten $(1,2,3)$ och vara parallellt med vektorerna $\mathbf{u} = (1,2,0)$ och $\mathbf{v} = (1,-1,1)$, så enda möjligheten är $\pi : (x,y,z) = (1,2,3) + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$. Vi måste kontrollera om punkten $(0,3,-5)$ ligger i detta plan.
   Vi får ekvationen $(0,3,-5) = (1,2,3) + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$ med totalmatris $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -8 \end{bmatrix}$. Ekvationssystemet saknar lösning, så detta plan uppfyller inte villkoren.
   (c)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x^2}{x^4 + 5x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x^2}{x^2} \frac{1}{(5+x^2)} = \frac{1}{5} .$$

2. (a) Nej, se figuren:

   (b) Falskt. Vi kan ta $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Då är $A + A^2 = 0$, men A är inverterbar.
   (c) Nej. Låt t.ex. $f(x) = 1$ om $x \geq 0$ och $f(x) = -1$ om $x \leq 0$. Då är $f(x)$ inte kontinuerlig (i origo) men $f^2(x) = 1$ för *alla* x och alltså kontinuerlig.
   (d) Falskt. Skärningspunkten är $(3,1,6)$. Punkten $(4,3,9)$ ligger inte i planet.
   (e) Nej Om t.ex. $f(x) = \sqrt{x}$ så är $f'(x) = 1/2\sqrt{x} \to 0$ då $x \to \infty$ men $f(x) \to \infty$ då $x \to \infty$ och saknar alltså gränsvärde.
   (Ett annat exempel som saknar oegentligt gränsvärde är $\cos(\sqrt{x})$.)

(f) Falskt. Vi har en fri variabel.

3. Se Lay sid 172 och Sats 2.14 sid 173.

4. Vi har

$$f'(x) = \frac{e^{-x^2}(-2x(2x-3)-2)}{(2x-3)^2} = \frac{-4e^{-x^2}}{(2x-3)^2}\left(x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{-4e^{-x^2}}{(2x-3)^2}\left(x-1)(x-\frac{1}{2})\right) \; .$$

Vi får följande teckentabell:

Dessutom är $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 3/2+} = +\infty$ och $\lim_{x\to 3/2-} = -\infty$ och grafen blir

5. a) $\delta f \approx f'(x)\delta x = e^x \; \delta x = e^{0.1} \; \delta x \approx 1.1 \; \delta x.$

b) $f(x) \approx 1 + x$

Framåt: $1 + x - e^x \approx -\frac{x^2}{2} = -\frac{0.1^2}{2} = -0.005$

Bakåt: $f^{-1}(1+x) - x = ln(1+x) - x \approx x - \frac{x^2}{2} - x = -\frac{x^2}{2} = -\frac{0.1^2}{2} = -0.005$

c) $y = 1 + x$ i IEEE-standard.

Framåt: $\hat{y} = (1 + x(1+\epsilon_1))(1+\epsilon_2)$. Relativt fel $\frac{\hat{y}-y}{y} = \frac{\epsilon_2 + x(\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_1\epsilon_2)}{1+x}$.

$|$ relativt fel $| \leq \frac{\mu+|x|(2\mu+\mu^2)}{|1+x|}$.

Bakåt: $\hat{y} = 1 + \epsilon_2 + x(1+\epsilon_1)(1+\epsilon_2) = \hat{1} + \hat{x}$ där

$\hat{1} = 1 + \epsilon_2$ med $\frac{\hat{1}-1}{1} = \epsilon_2$ och $| \frac{\hat{1}-1}{1} | \leq \mu$

$\hat{x} = x(1+\epsilon_1)(1+\epsilon_2)$ med $\frac{\hat{x}-x}{x} = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_1\epsilon_2$ och $| \frac{\hat{x}-x}{x} | \leq 2\mu + \mu^2$

Små störningar dvs algoritmen är stabil.

6. Vi skall ha en linjär avbildning $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sådan att

$$T(\mathbf{e}_1) = \begin{bmatrix} \cos 45^\circ \\ \sin 45^\circ \\ 0 \end{bmatrix}, \quad T(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} -\sin 45^\circ \\ \cos 45^\circ \\ 0 \end{bmatrix}, \quad T(\mathbf{e}_3) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Standardmatrisen för denna avbildning är

$$A = \begin{bmatrix} T(\mathbf{e}_1) & T(\mathbf{e}_2) & T(\mathbf{e}_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 2 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Bilden av vektorn $(1, 1, 1)$ är

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ \sqrt{2} \\ 2 \end{bmatrix}.$$

7.

Med beteckningar som i figuren där $0 \le x \le y$ gäller att arean är $xy = 2400$. Eftersom $2400 \ge xy \ge x^2$ skall vi bestämma minimum av längden

$$l(x) = 3x + 2y = 3x + \frac{4800}{x}$$

då $0 \le x \le \sqrt{2400}$. (Observera att $\sqrt{2400} > 40$.)

Vi har

$$l'(x) = 3 - \frac{4800}{x^2} = \frac{3(x^2 - 1600)}{x^2} = \frac{3(x-40)(x+40)}{x^2}.$$

Så $l'(x)$ är negativ då $0 < x < 40$ och positiv då $x > 40$. Alltså blir längden, och därmed kostnaderna, minimal då $x = 40$ och därmed $y = 60$.

8. Vi radreducerar A. Använd första raden för att radreducera i första kolonnen.

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 7-k \\ 0 & 0 & -1 & k-5 \end{bmatrix}$$

Multiplicera sista raden med -1, byt plats på andra och tredje raden, och använd sedan (den nya) andra raden för att radreducera i tredje kolonnen.

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 5-2k \\ 0 & 0 & 1 & 5-k \\ 0 & 0 & 0 & k-3 \end{bmatrix}$$

Vi har nu två fall.

Om $k = 3$ har vi bara två pivotpositioner. Rangen för A är alltså i detta fall 2, och

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Variablerna x_2 och x_4 blir fria och den allmänna lösningen till $A\mathbf{x} = 0$ blir

$$\mathbf{x} = x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

De två vektorerna är linjärt oberoende och en bas för nollrummet ges alltså av $(-2, 1, 0, 0)$ och $(1, 0, -2, 1)$.

Om $k \neq 3$ har vi tre pivotpositioner och därmed rangen 3. I detta fall är x_2 den enda fria variabeln och vi kan radreducera även i sista kolonnen så att

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k-3 \end{bmatrix}.$$

Den allmänna lösningen till $A\mathbf{x} = 0$ blir

$$\mathbf{x} = x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Nollrummet är alltså en-dimensionellt och spänns av vektorn $(-2, 1, 0, 0)$.