

**Analyssvar (ej lösningar) till matematik med tillämpingar 1, del 1 (MAN100)**  
Tentamen den 17 mars 2004, 8.45-13.45

Om inget annat anges, skall den fullständiga lösningen på uppgiften redovisas, inklusive räkningar, eventuella hänvisningar till satser och motiveringar. Varje uppgift ger sammanlagt maximalt 3 poäng utom uppgift 1 som kan ge 4 poäng.

- (1) På den här uppgiften skall du bara ge svar. (En poäng per deluppgift.)

(a) Vad blir

$$\frac{d}{dx} \left( x^{\frac{1}{x}} \right)?$$

Svar:  $x^{1/x-2}(1 - \ln x)$ .

- (b) Bestäm standardmatrisen för rotationen moturs en vinkel  $\frac{\pi}{4}$  (dvs  $45^\circ$ ) i planet  $\mathbb{R}^2$ . Bestäm bilden av vektorn  $\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$  under rotationen.

- (c) Bestäm inversen till matrisen

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

- (d) Låt

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{om } x \geq 0 \\ ax^2 - bx + c, & \text{om } x < 0. \end{cases}$$

Bestäm  $a$ ,  $b$  och  $c$  så att  $f$  blir två gånger deriverbar för alla reella  $x$ .

Svar:  $a = -1/2$ ,  $b = 0$  och  $c = 1$ .

- (2) Nedan ges 6 påståenden. Avgör för vart och ett av dem om det är sant eller falskt. Endast svar skall ges. Rätt svar ger 0,5 poäng, fel svar -0,5 poäng och inget svar 0 poäng. Du kan inte få mindre än 0 poäng på hela uppgiften.

(a) Linjerna  $x + 2y = 1989$  och  $15x - 8y = 39486$  är vinkelräta.

(b) Grafen till funktionen  $f(x) = (x - 2)^4$  har en inflexionspunkt i  $x = 2$ .

Svar: Nej, grafen är konvex överallt.

(c)

$$\lim_{x \rightarrow 0} x(\ln x)^{1000} < 0.$$

Svar: Falskt,  $= 0$ , standardgränsvärde.

(d) Det finns en  $3 \times 2$  matris  $A$  sådan att för alla  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$  är  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  lösbar.

(e) Låt  $m \leq n$  vara positiva heltal och  $p$  ett polynom av grad  $m$  och  $q$  ett polynom av grad  $n$ . Låt  $f(x)$  vara den rationella funktionen  $p(x)/q(x)$ . Då måste alltid

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0.$$

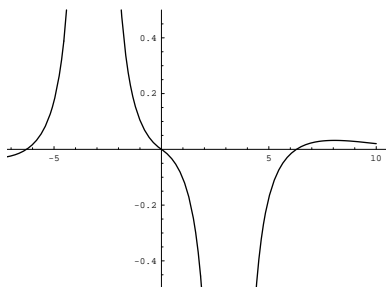
Svar: Sant, den ledande termen i nämnaren av derivatan kommer att vara en nollskild konstant multiplicerat med  $x^{2n}$ , medan täljaren har motsvarande  $x^{m+n-1}$ .

(f) Är vektorerna  $(1, -1, 1)$ ,  $(1, -1, 0)$  och  $(1, 1, 1)$  linjärt oberoende?

(3) Konstruera en udda funktion  $f(x)$  så att  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x) = -\infty$  och så att  $f$  har oändligt många lokala extrempunkter.

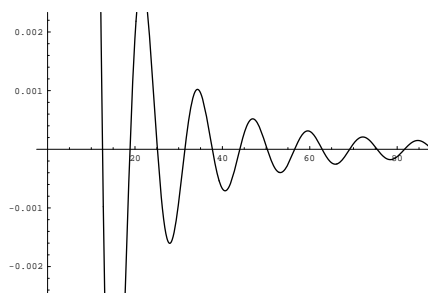
17mars04.mvs.nb

1



17mars04.mvs.nb

1



Svar: Ett exempel skulle kunna vara  $f(x) = -\frac{\sin(x/2)}{(|x|-\pi)^2}$ .

- (4) Bestäm en bas för nollrummet  $\text{Nul}A$  och en bas för kolonnrummet  $\text{Col}A$  till matrisen

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 6 & 5 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

- (5) Vilken punkt på grafen  $y = \cos x$  minimerar avståndet till origo?

Svar: Punkten  $(0, 1)$ , vilket fås genom att minimera avståndet till origo i kvadrat,  $a(x) = x^2 + \cos^2 x$ . En stationär punkt  $x$  uppfyller sin  $2x = 2x$ . Teckenstudium ger att  $x = 0$  är enda lösningen och att det ger en minpunkt.

- (6) Låt

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 4 & 7 & -4 \\ 6 & 9 & p \end{bmatrix}.$$

Bestäm talet  $p$  så att ekvationen  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  har mer än en lösning och ange alla lösningar i detta fall.

- (7) Låt

$$h(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}.$$

Visa att  $h(x) < 0$  då  $x \neq 0$ .

Svar:  $h(0) = h'(0) = h''(0) = 0$  och  $h^{(3)}(x) = \sin x - x$  vet vi (standardgränsvärde) ett maximum i origo, dvs  $h^{(3)}(0) = 0$ , genom att följa teckenschemat för  $h''(x), h'(x)$  får vi tillslut det att  $h(x) < 0$  då  $x \neq 0$ .

- (8) Ekvationen  $x + 2y + 3z = 6$  beskriver ett plan  $\mathcal{P}$  i  $\mathbb{R}^3$ . Bestäm en ortogonalbas för  $\mathbb{R}^3$  sådan att en av basvektorerna är vinkelrät mot (dvs normal mot) planet  $\mathcal{P}$ .