Matematik
Göteborgs universitet
Torbjörn Lundh
Genkai Zhang

Hjälpmedel:
Typgodkänd räknedosa
Telefonvakt: Fredrik Engström
0740-350646

Matematik med tillämpingar 1, del 1 (MAN100)
Tentamen den 17 mars 2004, 8.45-13.45

Om inget annat anges, skall den fullständiga lösningen på uppgiften redovisas, inklusive räkningar, eventuella hänvisningar till satser och motiveringar. Varje uppgift ger sammanlagt maximalt 3 poäng utom uppgift 1 som kan ge 4 poäng.

(1) På den här uppgiften skall du bara ge svar. (En poäng per deluppgift.)
  (a) Vad blir
$$\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{x}}\right)?$$
  (b) Bestäm standardmatrisen för rotationen moturs en vinkel $\frac{\pi}{4}$ (dvs 45^0) i planet $\mathbb{R}^2$. Bestäm bilden av vektorn $\begin{bmatrix}-2\\3\end{bmatrix}$ under rotationen.
  (c) Bestäm inversen till matrisen
$$A = \begin{bmatrix}-3 & 4\\ 1 & 2\end{bmatrix}$$
  (d) Låt
$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{om } x \geq 0\\ ax^2 - bx + c, & \text{om } x < 0.\end{cases}$$
  Bestäm a, b och c så att f blir två gånger deriverbar för alla reella x.

(2) Nedan ges 6 påståenden. Avgör för vart och ett av dem om det är sant eller falskt. Endast svar skall ges. Rätt svar ger 0,5 poäng, fel svar -0,5 poäng och inget svar 0 poäng. Du kan inte få mindre än 0 poäng på hela uppgiften.
  (a) Linjerna $x+2y = 1989$ och $15x-8y = 39486$ är vinkelräta.
  (b) Grafen till funktionen $f(x) = (x-2)^4$ har en inflexionspunkt i $x = 2$.
  (c)
$$\lim_{x\to 0} x(\ln x)^{1000} < 0.$$
  (d) Det finns en 3×2 matris A sådan att för alla $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ är $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lösbar.

(e) Låt $m \leq n$ vara positiva heltal och p ett polynom av grad m och q ett polynom av grad n. Låt $f(x)$ vara den rationella funktionen $p(x)/q(x)$. Då måste alltid

$$\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0.$$

(f) Är vektorerna $(1,-1,1)$, $(1,-1,0)$ och $(1,1,1)$ linjärt oberoende?

(3) Konstruera en udda funktion $f(x)$ så att $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to\pi^+} f(x) = -\infty$ och så att f har oändligt många lokala extrempunkter.

(4) Bestäm en bas för nollrummet Nul$A$ och en bas för kolonnrummet Col$A$ till matrisen

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 6 & 5 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

(5) Vilken punkt på grafen $y = \cos x$ minimerar avståndet till origo?

(6) Låt

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 4 & 7 & -4 \\ 6 & 9 & p \end{bmatrix}.$$

Bestäm talet p så att ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har mer än en lösning och ange alla lösningar i detta fall.

(7) Låt

$$h(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}.$$

Visa att $h(x) < 0$ då $x \neq 0$.

(8) Ekvationen $x + 2y + 3z = 6$ och beskriver ett plan $\mathcal{P}$ i $\mathbb{R}^3$. Bestäm en ortogonalbas för $\mathbb{R}^3$ sådan att en av basvektorerna är vinkelrät mot (dvs normal mot) planet $\mathcal{P}$.