Matematik
Göteborgs universitet
Hasse Carlsson,
Torbjörn Lundh

Hjälpmedel:
Typgodkänd räknedosa
Telefonvakt: Håkan Samuelsson
0740-350646

Matematik med tillämpingar 1, del 1 (MAN100)
Tentamen den 17 april 2003, 8.45-13.45

Om inget annat anges, skall den fullständiga lösningen på uppgiften redovisas, inklusive räkningar, eventuella hänvisningar till satser och motiveringar. Varje uppgift ger sammanlagt maximalt 3 poäng utom uppgift 1 som kan ge 4 poäng.

1. På den här uppgiften skall du bara ge svar. (En poäng per deluppgift.)

   (a) Bestäm gränsvärdet
   $$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x^2}.$$

   (b) Bestäm ekvationen för den räta linje som går genom punkten $(1, 2)$ och är vinkelrät mot linjen $3x + 2y = 3$.

   (c) Derivera följande uttryck med avseende på x.
   $$A\pi^x - \frac{B}{\ln x^C}.$$

   (d) Lös ekvationssystemet
   $$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x - \ \ y + z = 3 \\ 4x + 3y - z = 5 \end{cases}.$$

2. Nedan ges 6 påståenden. Avgör för vart och ett av dem om det är sant eller falskt. Endast svar skall ges. Rätt svar ger 0,5 poäng, fel svar -0,5 poäng och inget svar 0 poäng. Du kan inte få mindre än 0 poäng på hela uppgiften.

   (a) Matrisen
   $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$
   är inverterbar.

(b) Funktionen

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{x+\ln 2}-2}{x} & \text{om } x \neq 0 \\ 3\ln 2 & \text{om } x = 0 \end{cases}$$

är kontinurelig för alla reella x.

(c) Rangen för matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

är 4.

(d) Punkten $x = 1$ är en lokal minimipunkt för

$$f(x) = x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1.$$

(e) Antag att A är en 4×4 matris sådan att ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ endast har lösningen $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Då måste ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ha en lösning för varje $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^4$.

(f) Antag att f är en deriverbar funktion. Då gäller att funktionen f' också är deriverbar.

3. Välj ytterligare en vektor så att den tillsammans med $\mathbf{u} = (1, 2, 3)$ och $\mathbf{v} = (4, 4, 6)$ spänner $\mathbb{R}^3$. Visa detta.

4. Du ska konstruera en rombformad drake med maximal area. Till ditt förfogande har du en tunn bambukäpp med längd L som du ska dela i två delar. Du kommer sedan att knyta ihop dessa delar så att de skär varandra under rät vinkel. Denna knytpunkt markerar också delarnas respektive mittpunkt. Denna krysskonstruktion kommer att utgöra stommen i draken. Dvs ändarna på de två bambupinnarna kommer att ligga i hörnen på draken.

   Hur stor blir den maximala drakarean? (Tag ingen hänsyn till drakens eventuella flygegenskaper.)

5. I ett dataspel behöver vi en avbildning som roterar alla punkter i xy-planet 45° grader motsols i planet, samt lutar och förlänger vektorer parallella med z-axeln så att vektorn $(0, 0, 1)$ avbildas på $(2, 2, 2)$.
   Bestäm matrisen för den linjära avbildning som gör detta.
   Vad är bilden av vektorn $(1, 1, 1)$?

6. Plotta grafen för funktionen

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

och ange eventuella extrempunkter, asymptoter, inflexionspunkter och var grafen är konkav respektive konvex.

7. Låt V vara det delrum av $\mathbb{R}^3$ som spänns av vektorerna $\mathbf{v}_1 = (2, 2, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (5, 2, 4)$ och $\mathbf{v}_3 = (1, -2, 2)$ (dvs. $V = \text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$).

   (a) Bestäm dimensionen för V.

   (b) Bestäm en ortonormerad bas för V.

8. Antag att $f'(x) > 1$ för alla $x \geq \alpha$ och att $f(\alpha) = \alpha$. Visa att $f(x) > f^{-1}(x)$ för alla $x > \alpha$.

Tentaresultaten beräknas vara klara senast 29 april och kan fås per telefon 772 5388 (före 14.00).