Matematik med tillämpningar 1 del 1

Tentamen 17 april 2003

Kortfattade lösningar

1. (a)

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 = 1.$$

(b) Linjen $3x + 2y = 3$ har normalvektorn $\mathbf{n} = (3, 2)$. Detta är en riktningsvektor för den sökta linjen som på parameterform har ekvationen

$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 + 2t \end{cases} .$$

Detta ger $2x - 3y = 2 + 6t - 6 - 6t = -4$ eller $3y - 2x = 4$.

(c) Vi skriver först om π^x till $e^{x\ln\pi}$. Detta ger oss

$$\frac{d}{dx}(A\pi^x - \frac{B}{\ln x^C}) = \ldots = A\pi^x \ln\pi + \frac{BC}{x(\ln x^C)^2}.$$

(d) Gaussellimination ger

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & -1 & 5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & 3 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Så z är fri. Med $z = t$ ger andra ekvationen $5y = -1 + 3t$ eller $y = -1/5 + 3/5t$ som sen i den första ekvationen ger $x = 1 - 2y + z = 7/5 - 1/5t$. Alltså

$$\begin{cases} x = \frac{7}{5} - \frac{1}{5}t \\ y = -\frac{1}{5} + \frac{3}{5}t \\ z = t \end{cases} .$$

2. (a) Falskt. Gaussellimination ger

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -1 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Matrisen har alltså en fri variabel och är *inte* inverterbar.

(b) Falskt, eftersom

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x+\ln 2}-2}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{2(e^x-1)}{x} = (\text{ standardgränsvärde })$$
$$= 2 \neq 3\ln 2 \approx 2.07944.$$

(c) Falskt. Rangen kan aldrig vara större än antalet kolonner, dvs. 3

(d) Falskt. Genom upprepad polynomdivision, eller igenkännande av binomialutveckling ser vi att

$$f(x) = x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1 = (x-1)^5.$$

Vi ser att $x = 1$ är en terrasspunkt.

(e) Sant. Villkoret att $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ är den enda lösningen till $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ medför att A är inverterbar och alltså har $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lösningen $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$.

(f) Falskt. Se tex på funktionen $f(x) = x|x|$.

3. Tag t.ex. $\mathbf{w} = (0, 0, 1)$. Då gäller

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

och vi ser att $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ är linjärt oberoende.

4. Låt oss dela bambukäppen i två delar med längderna a respektive b. Genom att se på den resulterande romben som två trianglar med bas b och höjd $\frac{a}{2}$ får vi drakarean $A = 2\frac{b(a/2)}{2} = \frac{ab}{2}$. Eftersom $b = L - a$ kan vi skriva A som en funktion av a. Dvs

$$A(a) = \frac{1}{2}a(L-a) = \frac{aL - a^2}{2},$$

där $0 < a < L$. Vi ser att $A(0) = A(L) = 0$ och för att uppnå ett globalt maximum får vi leta efter en inre lokalt maximum.

$$A'(a) = \frac{L - 2a}{2}.$$

Dvs $a = \frac{L}{2}$ är en stationär punkt. Eftersom $A''(a) < 0$ är den enda stationära punkten ett lokalt maximum vilket då kommer att ge oss den globala maximala arean. Med andra ord blir den maximala arean av draken $A(L/2) = \frac{L^2}{8}$.

5. Vid rotationen avbildas $\mathbf{e}_1 = (1,0,0)$ på $\mathbf{f}_1 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (1,0,0)$ på $\mathbf{f}_2 = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0)$ och $\mathbf{e}_3$ på sig själv. I näst steg avbildas $\mathbf{f}_1$ och $\mathbf{f}_2$ på sig själva och $\mathbf{e}_3$ på $\mathbf{f}_3 = (2,2,2)$. Avbildningens matris är matrisen som har $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$ och $\mathbf{f}_3$ som kolonnmatriser, dvs.

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

6. Vi ser att

$$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}.$$

Teckenstudium ger att f är växande på intervallet $(-\infty, 0)$, har en maximipunkt i origo $f(0) = 1$, samt avtagande på intervallet $(0, \infty)$.

Vi ser dessutom att $y = 0$ är en horisontell asymptot då $x \to \pm\infty$.

Andraderivatan

$$f''(x) = \frac{6x^2 - 2}{(x^2+1)^3}$$

ger att funktionsgrafen har inflexionspunkter i $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ samt att grafen är konkav på intervallet $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$.

7. (a) För att bestämma dimensionen på kolonnrummet observerar vi att

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & -6 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dimensionen är alltså två.

(b) Från (a) ser vi att $\mathbf{f}_1 = (2,2,1)$ och $\mathbf{f}_2 = (5,2,4)$ är en bas för kolonnrummet. Eftersom $\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_2 = 10 + 4 + 4 = 18 \neq 0$ är de inte ortogonala. För att få en ortogonalbas sätter vi $\mathbf{e}_1 = \mathbf{f}_1$ och $\mathbf{e}_1 = \mathbf{f}_2 - t\mathbf{f}_1$. För att $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = 0$ skall $0 = \mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_2 - t\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_1 = 18 - 9t$ dvs. $t = 2$. Vi får $\mathbf{e}_2 = (5,2,4) - 2(2,2,1) = (1,-2,3)$ och den sökta basen är (t.ex.) $\frac{1}{3}(2,2,1)$ och $\frac{1}{\sqrt{14}}(1,-2,3)$.

8. Vi har att $f^{-1}(\alpha) = \alpha$ och att

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} < 1, \text{ om } x \geq \alpha.$$

Låt h vara en hjälpfunktion där $h(x) = f(x) - f^{-1}(x)$. Då har vi att $h'(x) = f'(x) - (f^{-1})'(x) > 0$, då $x \geq \alpha$. Dvs h är strängt växande då

$x \geq \alpha$. Så om $x > \alpha$ har vi att $h(x) > h(\alpha) = \alpha - \alpha = 0$. Detta ger oss att $f(x) > f^{-1}(x)$ för alla $x > \alpha$; vilket var vad vi skulle visa.