Matematik med tillämpningar 1 del 1

Tentamen 19 mars 2003

Kortfattade lösningar

1. (a) $\frac{d}{dx}\sqrt{\ln x} = \frac{1}{2\sqrt{\ln x}}\frac{1}{x}$.

   (b) Eftersom $(2,1)$ är en normalvektor är ekvationen $2x + y = c$. Stoppar vi in $(1,2)$ i denna ekvation får vi $c = 4$ och alltså är ekvationen $2x + y = 4$.

   (c) $\sin^2 3x = \frac{1}{2}$ ger att $\sin 3x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$; vilket i sin tur innebär att $3x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$, där k är ett heltal. Dvs, alla lösningar kan skrivas som $x = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{6}$.

   (d) Gaussellimination ger

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{array}\right].$$

   Inversen är alltså $\begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$.

2. (a) Falskt. $(3,1,3)\cdot(1,2,-1) = 3 + 2 - 3 = 2 \neq 0$.

   (b) Falsk, eftersom

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}.$$

   (c) Sant. Matrisen med dessa vektorer som kolonnvektorer (i lämplig ordning) är

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

   Matrisen har tre pivotelement och vektorerna är därför linjärt oberoende och spänner $\mathbb{R}^3$.

   (d) Sant. Eftersom $f''(x) = 18x$, byter andraderivatan tecken i $x = 0$ vilket enligt definitionen betyder att $x = 0$ är en inflexionspunkt.

   (e) Falskt. Vektorerna är linjärt oberoende så nollrummets dimension är minst två. Så summan av nollrummets dimension och matrisens rang är minst fyra. Men enligt dimensionsatsen är denna summa lika med antalet kolonner som är tre vilket är omöjligt.

(f) Sant. Vi har att $f'(x) = 3x^2$. Den sk. enpunktsformeln för räta linjer ger då, med $x_0 = y_0 = 0$, att $(y - 0) = k(x - 0)$, dvs $x^3 + 2 = 3x^2 x$. Vilket ger ekvationen $x^3 = 1$, så $x = 1$. Detta betyder att $k = 3$ och den sökta linjens ekvation blir då $y = 3x$.

3. Gausselimination ger

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -8 & p & q \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & 5 & 3 \\ 0 & -6 & p-4 & q-2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & p-14 & q-8 \end{array}\right].$$

Om $p \neq 14$ har matrisen tre pivotelement och lösningen är entydig. Så för att de skall finnas flera lösningar måste $p = 14$. Den sista raden blir då $\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & q-8 \end{array}\right]$ som har lösning bara när $q = 8$. Alltså måste $p = 14$ och $q = 8$ och då är

$$A \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Här är z fri och vi får $z = t$, $y = -1 + \frac{5}{3}t$ och $x = -\frac{2}{3}t$, eller i vektorform (samt byte av t mot $3t$) $(x, y, z) = (0, -1, 0) + t(-2, 5, 3)$.

4. Ur $f(x)$ ser vi direkt att $y = 0$ är en horisontell asymptot då $x \to \pm\infty$ och att $x = 1$ och $x = -1$ är vertikala asymptoter.

Vi har dessutom att $f'(x) = \frac{4x}{(x^2-1)^2}$ och att $f''(x) = -\frac{4(1+3x^2)}{(x^2-1)^3}$. Detta ger mha teckenschema att $x = 0$ är en min-punkt (med $f(0) = 2$) och att grafen är konvex för $-1 < x < 1$ och konkav då $|x| > 1$.

5. Radreduktion ger

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 6 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Den först och tredje kolonnen är pivotkolonner så en bas för kolonnrummet ges av första och tredje kolonnen i den *ursprungliga* matrisen, dvs. $(1, 3, 2, 0)^T$ och $(0, 1, 1, -3)^T$, är en bas för kolonnrummet.

För att bestämma en bas för nollrummet löser vi ekvationen $Ax = 0$. x_2 och x_4 är fria variabler och vi får

$$\begin{cases} x_1 = -s - 2t \\ x_2 = s \\ x_3 = 0 \\ x_4 = t \end{cases}$$

eller $\mathbf{x} = s(-1,1,0,0)^T + t(-2,0,0,1)^T$ så en bas för kolonnrummet ges av $(-1,1,0,0)^T$ och $(-2,0,0,1)^T$.

6. Volymen är 1 m^3 vilket ger oss ekvationen $1 = 2h^2b$ och lådans ytarea är $A = 2(hb + 2h^2 + 2bh)$. Genom förenkling och sambandet i volymsformeln mellan h och b kan vi skriva arean som en funktion av h, $A(h) = \frac{3}{h} + 4h^2$. Vi ser direkt att $A(h) \to \infty$ om h går mot 0 eller ∞. Eftersom $A(h)$ är kontinuerlig för $h > 0$, måste det finnas ett globalt (och tillika lokalt) minimum. Vi söker därför efter en stationär punkt, dvs $A'(h) = 0$. Med andra ord $-\frac{3}{h^2} + 8h = 0$. Denna ekvation ger lösningen $h = \frac{3^{\frac{1}{3}}}{2}$. Detta ger basen $b = \frac{1}{2h^2} = \frac{2}{3^{2/3}}$. Efter som detta är den enda stationära punkten måste det vara ett lokalt och globalt minimum. För att kolla detta kan man göra ett teckenschema på $A'(h)$ eller alternativt kolla andraderivatan $A''(h) = \frac{6}{h^3} + 8 > 0$, för $h > 0$ - dvs den enda stationära punkten är ett globalt minimum.

7. Låt $\mathbf{f}_1 = (1,0,1)$. En vektor som är vinkelrät mot $\mathbf{f}_1$ är $\mathbf{f}_2 = (0,1,0)$. För att hitta en tredje, $\mathbf{f}_3$, ansätter vi $\mathbf{f}_3 = (1,x,y)$. Då ger $0 = \mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_3 = 1 + y$ att $y = 1$ och $0 = \mathbf{f}_2 \cdot \mathbf{f}_3 = x$ så $\mathbf{f}_3 = (1,0,-1)$.

   För att bestämma koordinaterna för $(1,2,3)_e$ i basen $\mathbf{f}$ sätter vi $(1,2,3)_e = (x,y,z)_f$ eller utskrivet $(1,2,3)_e = x\mathbf{f}_1 + y\mathbf{f}_2 + z\mathbf{f}_3 = (x+z, y, x-z)_e$, vilket ger $x = 2$, $y = 2$ och $z = -1$. Så $(1,2,3)_e = (2,2,-1)_f$.

8. Kalla sambandet $\tan x_0 = 2x_0$ (som gäller för ett oändligt antal olika x_0) för ekvation (1). Enligt Newton-Raphsons metod får vi nästa punkt i följden som förhoppningsvis skall konvergera mot en lösning av ekvationen $f(x) = \sin x = 0$, genom följande formel (som är lättare att härleda än att minnas):

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_0 - \frac{\sin x_0}{\cos x_0} = x_0 - \tan x_0.$$

   Genom ekvation (1) har vi då att

$$x_1 = x_0 - 2x_0 = -x_0.$$

   Nästa punkt i följden blir då på samma sätt

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = x_1 - \tan x_1 \ .$$

   Ekvation (1) och resultatet innan att $x_1 = -x_0$ ger oss eftersom tan är en udda funktion att

$$x_2 = -x_0 - \tan(-x_0) = -x_0 + \tan x_0 = -x_0 + 2x_0 = x_0.$$

Vi kommer alltså genom $x_2 = x_0$ tillbaka till vår startgissning! Med startgissningen x_0 kommer Newton-Raphsons metod inte att konvergera mot en lösning till $\sin x = 0$ utan att fastna i en oändlig loop, $x_0, -x_0, x_0, -x_0, \ldots$.