Matematik
Göteborgs universitet

Matematik med tillämpningar 1, del 2

Kortfattade lösningar till tentamen den 7 juni 2005

1. Låt $t = \frac{x}{2}$. Då blir $\sin \frac{1}{2}\Big[\arctan t\Big]_{-\infty}^{\infty} = \sin \frac{\pi}{2} = 1$.

2. Genom att bilda vektorer, som representerar kanterna i parallellogrammen, ser vi att parallellogrammen spänns upp av vektorerna $\mathbf{u} = (5, 2, -1) - (0, 1, 1) = (5, 1, -2)$ och $\mathbf{v} = (-1, -1, 3) - (0, 1, 1) = (-1, -2, 2)$, så dess area är längden av $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$. Eftersom $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (-2, -8, -9)$ är $||\mathbf{u} \times \mathbf{v}|| = \sqrt{149}$.

3. Det entydigt bestämda polynom som antar givna värden för $x = 0,\ 1,\ 2,\ 3$ har grad 3 och kan skrivas

$$p(x) = c_0 + c_1(x-0) + c_2(x-0)(x-1) + c_3(x-0)(x-1)(x-2) =$$

$$c_0 + c_1 x + c_2 x(x-1) + c_3 x(x-1)(x-2).$$

Härav följer $19 = p(0) = c_0 \Longrightarrow c_0 = 19$, och därmed

$$p(x) = 19 + c_1 x + c_2 x(x-1) + c_3 x(x-1)(x-2).$$

Detta medför att $1 = p(1) = 19 + c_1 \Longrightarrow c_1 = -18$. Vi kan nu skriva

$$p(x) = 19 - 18x + c_2 x(x-1) + c_3 x(x-1)(x-2)$$

vilket ger $3 = p(2) = 19 - 18 \cdot 2 + c_2 2 \cdot (2-1) = 19 - 36 + 2 + c_2 \Longrightarrow c_2 = 10$. Nu blir

$$p(x) = 19 - 18x + 10x(x-1) + c_3 x(x-1)(x-2)$$

och vi får $7 = p(3) = 19 - 18 \cdot 3 + 10 \cdot 3(3-1) + c_3 \cdot 3(3-1)(3-2) = 25 + 6c_3 \Longrightarrow c_3 = -3$, så det sökta polynomet är

$$p(x) = 19 - 18x + 10x(x-1) + 3x(x-1)(x-2) = 19 - 34x + 19x^2 - 3x^3.$$

4. Matrisen är symmetrisk och därmed t.o.m. ortogonalt diagonaliserbar. Egenvärdenna till A är 7 och 2. Egenvektorer som hör till egenvärdena 7 och 2 är

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

så med

$$P = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

och med

$$D = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

är $P^{-1}AP = D$.

5. Vi har $h = 0.1$, $y_0 = 1$, $y' = -y^2 = f(t, y) \implies f(t, y) = -y^2$, $t_1 = t_0 + h = 0.1$. Med Eulers framåtmetod får vi

$$y_1 = y_0 + hf(t_0, y_0) = y_0 + h(-{y_0}^2) = 1 - 0.1 \cdot 1 = 0.9.$$

Med Eulers bakåtmetod får vi

$$y_1 = y_0 + hf(t_1, y_1) = y_0 + h(-{y_1}^2) = 1 - 0.1 \cdot {y_1}^2 \implies 0.1{y_1}^2 + y_1 - 1 = 0.$$

Andragradsekvationen har rötterna $y_1 = -5 \pm \sqrt{35}$. Den exakta lösningen är positiv, så endast den positiva lösningen till andrgradsekvationen är relevant, vilket ger $y_1 = \sqrt{35} - 5 \approx 0.9161$. För den exakta lösningen gäller $y(0.1) = \frac{1}{1+0.1} = \frac{10}{11} \approx 0.90910$, så felet i Eulers framåtmetod är med 4 decimaler $0.9 - 0.9091 = -0.0091$ medan felet i Eulers bakåtmetod är $0.9161 - 0.9091 = 0.0070$. Eulers bakåtmetod ger därför den bästa approximationen.

6. (a) Vi använder Gram-Schmidts ortogonaliseringsförfarande för att finna en ortogonalbas $\{\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2\}$. Välj

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1$$

och

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1.$$

Vi har

$$\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = 5, \quad \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = 5$$

så

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{5}{5}\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

vilket ger $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ som en ortogonalbas.

(b) Den punkt i V som ligger närmast $\mathbf{v}$ är

$$proj_V \mathbf{v} = \hat{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_2}{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2}\mathbf{u}_2,$$

vilket ger

$$\hat{\mathbf{v}} = \frac{5}{5}\mathbf{u}_1 + \frac{12}{6}\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(c) Avståndet mellan $\mathbf{v}$ och V är $||\mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}}||$. Vi har

$$\mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix},$$

så $||\mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}}|| = \sqrt{30}$.

7. Med beteckningar som i kompendiet har vi

$$T(0.8) = 0.8[\frac{6.050}{2} + 13.464 + \frac{29.964}{2}] = 0.8 \cdot 31.471 = 25.1768,$$

$$\begin{aligned} T(0.4) &= 0.4[\frac{6.050}{2} + 9.025 + 13.464 + 20.086 + \frac{29.964}{2}] = 0.4 \cdot 60.582 \\ &= 24.2328, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(0.2) &= 0.2[\frac{6.050}{2} + 7.389 + 9.025 + 11.023 + 13.464 + 16.445 \\ &+ 20.086 + 24.533 + \frac{29.964}{2}] = 0.2 \cdot 119.972 = 23.9944. \end{aligned}$$

Härav följer

$$\begin{aligned} T^{(2)}(0.2) &= T(0.2) + \frac{T(0.2) - T(0.4)}{3} = 23.9944 + \frac{23.9944 - 24.2328}{3} \\ &= 23.9944 + \frac{-0.2384}{3} = 23.9149, \end{aligned}$$

med ett trunkeringsfel på 0.2384 enligt tumregeln. Då detta överstiger det krävda trunkeringsfelet, beräkna vi $T^{(3)}(0.2)$. Vi har

$$\begin{aligned} T^{(2)}(0.4) &= T(0.4) + \frac{T(0.4) - T(0.8)}{3} = 24.2328 + \frac{24.2328 - 25.1768}{3} \\ &= 23.9181, \end{aligned}$$

så

$$\begin{aligned} T^{(3)}(0.2) &= T^{(2)}(0.2) + \frac{T^{(2)}(0.2) - T^{(2)}(0.4)}{15} = 23.9149 \\ &+ \frac{23.9149 - 23.9181}{15} = 23.9149 + \frac{-0.0032}{15} = 23.9147, \end{aligned}$$

med ett trunkeringsfel som inte överstiger 0.0032.

8. Svar: Båda dessa kvoter är $k_T = \frac{4}{3}$ och $k_R = \sqrt{3}$ för alla sådana polynom. (Dessa polynom ser ut som $p(x) = -cx^2 + c$.)