

Matematik
Göteborgs universitet
Hasse Carlsson,
Torbjörn Lundh

Hjälpmedel:
Typgodkänd räknedosa
Telefonvakt: Yosief Wondmagegne
0740-350646

Matematik med tillämpningar 1, del 1 (MAN100)

Tentamen den 9 augusti 2003, 8.45-13.45

Om inget annat anges, skall den fullständiga lösningen på uppgiften redovisas, inklusive räkningar, eventuella hänvisningar till satser och motive-ringar. Varje uppgift ger sammanlagt maximalt 3 poäng utom uppgift 1 som kan ge 4 poäng.

1. På den här uppgiften skall du bara ge svar. (En poäng per deluppgift.)

(a) Vad blir

$$\frac{d}{dx} \left(2 \tan(\sqrt{x}) \right)?$$

(b) Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + y - z = 4 \\ x + 2y + 2z = 3 \\ 2x + y + 3z = 1 \end{cases} .$$

(c) Vad är ekvationen för den linje som går genom punkten $(2, 1)$ och är vinkelrät mot linjen $x + 2y = 3$?

(d) Låt

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{om } x < \ln 2 \\ ax + b, & \text{om } x \geq \ln 2. \end{cases}$$

Bestäm a och b så att f blir deriverbar för alla reella x .

2. Nedan ges 6 påståenden. Avgör för vart och ett av dem om det är sant eller falskt. Endast svar skall ges. Rätt svar ger 0,5 poäng, fel svar -0,5 poäng och inget svar 0 poäng. Du kan inte få mindre än 0 poäng på hela uppgiften.

(a) Triangeln med hörnen $(1, 2, 1)$, $(2, 3, 3)$ och $(3, 2, 1)$ är vinkelrät.

(b)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)^n = \frac{1}{e^2}.$$

(c)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 \cos(x^2) - 2x + 1}{x^3 - x^2 \ln x} = 1.$$

(d) Rangén för matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

är två.

(e) Låt a_0, a_1, \dots, a_n vara positiva konstanter. Då är

$$\frac{d}{dx} \left(\ln \left(\sum_{k=0}^n a_k x^k \right) \right)$$

en rationell funktion för $x > 0$.

(f) Det finns en inverterbar 4×4 matris A så att $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ när $\mathbf{x} = (1, 2, 0, 1)^T$.

3. Ge exempel på en funktion $f(x)$ så att definitionsmängden

$$D_f =] - \infty, 1[\cup]1, \infty[$$

och att

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty \text{ och } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \infty.$$

4. Bestäm den punkt i planet $2x + y + z = 3$ som ligger närmast punkten $(6, 0, 3)$.

5. En segelbåt slörar längs en stadig kurs där avståndet i distansminuter från Vinga kan beskrivas av funktionen $p(t) = 1 - \cos t + \pi t + \frac{t^2}{2}$, där t är tiden i timmar efter starten vid Vinga och $t \in [0, 6]$. Två frågor: När var båtens hastighet som minst? När var accelerationen som minst?

6. Studera ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + y + z = p \\ x - y + z = 1 \\ 2x + 2y + pz = q \end{cases} .$$

- (a) Hur skall man bestämma p och q så att ekvationssystemet är entydigt lösbart?
 - (b) Hur skall man bestämma p och q så att ekvationssystemet har mer än en lösning?
 - (c) Finns det något eller några värden på p och q så att ekvationssystemet inte är lösbart?
7. Skissera grafen till funktionen $f(x) = 2 \ln(1 + x) - 2 \arctan x$. Ange den naturliga definitionsmängden, eventuella lokala extrempunkter och eventuella asymptoter. Ange också ett numeriskt uttryck för x värdet för en inflexionspunkt med tre decimalers noggrannhet samt beskriv din metod för att komma fram till din approximation.
8. Bestäm en ortogonalbas för \mathbb{R}^3 som innehåller vektorn $(1, 1, 1)$. Bestäm sedan koordinaterna för vektorn $(1, 3, -1)$ i denna bas.