MATEMATIK
Göteborgs universitet

Tentamensskrivning i **Matematisk logik** (MAN 480) 5p
2000-01-15, kl 8.45-13.45.
Inga hjälpmedel. Telefonvakt: 070 5208257

1. **a)** Ge en satsform i disjunktiv normalform som är ekvivalent med $(p \to q) \to \neg q$. (1,5p)

   **b)** Uttryck $(p \to q) \to \neg q$ med ett fullständigt konnektiv. (1,5p)

2. **a)** Ge en härledning i naturlig deduktion av $(\neg p \to q) \to (p \vee q)$. (Lagen om det uteslutna tredje får användas utan bevis.) (1,5p)

   **b)** Ge en Kripkemodell i vilken formeln $(\neg p \to q) \to (p \vee q)$ är falsk. Motivera ordentligt! (2p)

3. Låt $A$ vara en satslogisk formel. Visa att om $A$ är härledbar med naturlig deduktion för satslogik (inklusive $RAA$), så är $A$ en tautologi. Av introduktions- och eliminationsreglerna behöver endast de för $\vee$ behandlas. (3p)

4. Låt $\mathcal{L}$ vara ett predikatlogiskt språk. Definiera vad som menas med

   **a)** term i $\mathcal{L}$, (1p)

   **b)** formel (well-formed formula) i $\mathcal{L}$, (1p)

   **b)** tolkning (interpretation) av $\mathcal{L}$. (1p)

5. Låt $P$ och $Q$ vara ettställiga predikatsymboler.

   **a)** Härled i naturlig deduktion $\exists x Q(x)$ från antagandena $\forall x(P(x) \to Q(x))$ och $\exists x P(x)$. (1p)

   **b)** En av de nedanstående formlerna är en predikatlogisk sanning; ge en härledning i naturlig deduktion av den. Den andra formeln är inte en predikatlogisk sanning; ge en tolkning i vilken den är falsk. $x$ och $y$ är två olika variabler. (3p)

$$\forall x(P(x) \vee Q(y)) \to (\forall x P(x) \vee Q(y))$$

$$\forall x(P(x) \vee Q(x)) \to (\forall x P(x) \vee \forall x Q(x))$$

6. Låt $P$ vara en tvåställig predikatsymbol och $Q$ en ettställig predikatsymbol. Ge en prenexform till $(\exists x Q(x) \to P(x,y)) \to (\neg \exists x Q(x))$. (2p)

7. **a)** Låt $\Gamma$ vara en mängd av predikatlogiska formler och $A$ en sluten formel. Visa att om $A$ inte kan härledas ur $\Gamma$ så är $\Gamma \cup \{\neg A\}$ konsistent. (1p)

   **b)** Visa fullständighetssatsen under förutsättning att vi vet att varje konsistent mängd av predikatlogiska formler har en modell. (1,5p)

Var god vänd!

8. **a)** Definiera Gödels formel $U$ och visa att om $\mathcal{N}$ är $\omega$-konsistent så kan varken $U$ eller $\neg U$ härledas i $\mathcal{N}$. (3p)

**b)** Visa att teorin som fås genom att utvidga $\mathcal{N}$ med formeln $\neg U$ inte är $\omega$-konsistent. (1p)

Tentan beräknas vara färdigrättad inom 10 dagar; när den är klar, så meddelar jag det på kursens hemsida. Den kan hämtas i mottagningsrummet kl. 12.30-13.00 varje vardag.

Lycka till!

Jan