Differentialgeometri, VT01 INLÄMNINGSUPPGIFT 2. Lösningar

1. Hitta reguljära värden för funktionen $F(x,y,z) = x^2 + 2y^2 - z^2$. För vilka c beskriver ekvationen $F(x,y,z) = c$ en reguljär yta? Hitta en parametrisation till någon del av den ytan. I vika punkter på ytan passar tangentplanen genom origo? Genom $(0,0,1)$?

LÖSNING. Vi beräknar derivator, $F_x = 2x, F_y = 4y, F_z = -2z$. Alla tre derivator annulleras samtidigt endast i origo. $F(0,0,0) = 0$. Så alla c utom 0 är reguljära värden. För sådana c definierar $F = c$ en reguljär yta. För $c = 0$, ytan $x^2 + 2y^2 - z^2$ är en kon. Om vi tar bort en punkt, origo, so består kvarstående del av ytan av två delar, $z > 0$ och $z < 0$. För reguljära ytor, om man tar bort en punkt, så är vad som finns kvar sammanhängande. Så, $F = 0$ är inte en reg. yta.

Parametrisering: $x = u, y = v, z = \pm\sqrt{u^2 + 2v^2 - c}$

Tangentplan till ytan definierad av ekvationen $F(x,y,z) = 0$ i punkten (x_0, y_0, z_0) beskrevs av ekvationen

$$(x - x_0)F_x + (y - y_0)F_y + (z - z_0)F_z = 0.$$

I vårt fall:

$$2x_0(x - x_0) + 4y_0(z - z_0) - 2z_0(z - z_0) = 0.$$

För att avgöra om tangenten passerar genom någon punkt, sätter in pukten koordinater (x,y,z) i sista ekvationen. För origo, $(x,y,z) = (0,0,0)$, och vi kommer till $2x_0^2 + 4y_0^2 - 2z_0^2 = 0$, dvs $F(x_0, y_0, z_0) = 0$, men samtidigt $F(x_0, y_0, z_0) = c \neq 0$, därför finns det inga sådana punkter. För $(x,y,z) = (0,0,1)$, kommer vi på samma sätt till ekvationen

$$F(x_0, y_0, z_0) = z_0,$$

så $z_0 = c$, $x_0^2 + 2y_0^2 = c$. Sådana punkter finns bara för $c > 0$.

2. Två kurvor $\alpha(s)$ och $\beta(t)$ är givna. Hitta parametrisering till ytan som består av medelpunkterna till alla interval som förbinder punkter på dessa kurvor. Hitta något villkor för den ytan att vara reguljär. Hitta något exempel på kurvor för vilka ytan inte är reguljär och inte ens innehåller någon reguljär del.

LÖSNING. Parametrisering till ytan: $\mathbf{x}(s,t) = \frac{\alpha(t)+\beta(s)}{2}$. Ytan är reguljär om $\mathbf{x}_s \wedge \mathbf{x}_s \neq 0$, eller om $\alpha'(t)$ och $\beta'(s)$ aldrig är parallella. Om de alltid är parallella, t.ex. om kurvorna är parallella räta linjer, så är vår mängd bara är en rät linje.

3. Beräkna första fundamentalformen för ytan

$$\mathbf{x}(u,v) = (vp\cos u, vq\sin u, v^2).$$

LÖSNING. $\mathbf{x}_u = (-vp\sin u, vq\cos u, 0)$, $\mathbf{x}_v = (p\cos u, q\sin u, 2v)$.

$$E = v^2(p^2\sin^2 u + q^2\cos^2 u), F = v\sin u\cos u(q^2 - p^2), G = p^2\cos^2 u + q^2 sin^2 u + 4v^2.$$

$\mathrm{I}(a,b) = Ea^2 + 2Fab + Gb^2$.

4. Första fundamentalformen för ytan S är

$$ds^2 = du^2 + (u^2 + a^2)dv^2, a > 0.$$

Hitta perimetern av trekanten begränsad av kurvorna

$$u = \pm \frac{av^2}{2}, v = 1.$$

Hitta vinklarna av den trekanten.

LÖSNING. På uv -planen är skärningspunkten A mellan kurvorna $\alpha_1 : u = -av^2/2$ och $\alpha_2 : u = av^2/2$, $A(0,0)$. α_1 skär $\alpha_3 : v = 1$ i punkten $B(a/2, 1)$ och α_2 skär α_3 i $C(-a/2, 1)$. Kurvan parametriseras som $(at^2/2, t); 0 \leq t \leq 1$. Längden till α_1 är

$$\int_0^1 \sqrt{I(\alpha_1'(t))}dt = \int_0^1 \sqrt{u'^2 + (u(t)^2 + a^2)v'^2}dt = 3a/2.$$

På samma sätt, är längden till α_2 lika med $3a/2$, och längden till α_3 är lika med a. Så är perimetern $4a$. Vinkeln i Hörn B är lika med

$$\cos(B) = \frac{< \alpha_1'(1), \alpha_3'(1) >}{|\alpha_1'(1)||\alpha_2'(1)|},$$

osv.

Lösningar lämnas in senast 26. februari