1. Vi beräknar koefficienterna till första och andra fundamentalformer.

$$\tilde{x}_u = x_u + aN_u, \tilde{x}_v = x_v + aN_v$$

$$\tilde{E} = x_u^2 + 2a < x_u, N_u > +a^2 N_u^2.$$

Men vi vet att $< x_u, N_u >= -e$, $N_u^2 =< N_u, a_{11}x_u + a_{21}x_v >= -a_{11}e - a_{21}f$,
så

$$\tilde{E} = E - 2ae + a^2(He - EK) = (1 - a^2K)E + 2a(aH - 1)e.$$

På liknande sätt,

$$\tilde{F} = (1 - a^2K)F + 2a(aH - 1)f$$

$$\tilde{G} = (1 - a^2K)G + 2a(aH - 1)g$$

För att hitta andra fundamentalformen, vi bemärker att N_u, N_v är ortogonala med N, så

$$\tilde{x}_u = x_u + aN_u, \tilde{x}_v = x_v + aN_v$$

är ortogonala med N. Därför normaler till S och S_a är samma.

$\tilde{e} =< N, \tilde{x}_{uu} >=< N, x_{uu} + aN_{uu} >= e + a < N, N_{uu} >$.

$$< N, N_{uu} >=< N, N_u >_u - < N_u, N_u >= -(2eH - EK),$$

så

$$\tilde{e} = e - a(2eH - EK)$$

och, på liknande sätt,

$$\tilde{f} = f - a(2fH - EK),$$

$$\tilde{g} = g - a(2gH - EK).$$

När vi sätter dem i uttrycket för krökningar, får vi

$$\tilde{K} = \frac{K}{1 - 2aH + a^2K}, \tilde{H} = \frac{H - aK}{1 - 2aH + a^{2K}}$$

2. Med vanliga parametriseringen,

$$x_u = (1, 0, 2(\frac{1}{v} - \frac{v}{u^2})), x_v = (0, 1, 2(\frac{1}{u} - \frac{u}{v^2})),$$

$$x_u \wedge x_v = (2(\frac{1}{u} - \frac{u}{v^2}, 2(\frac{1}{v} - \frac{v}{u^2}, 1),$$

$$x_{uu} = (0, 0, 4\frac{v}{u^3}), x_{uv} = (0, 0, -2(u^{-2} + v^{-2})), x_{vv} = (0, 0, 4\frac{u}{u^v}).$$

Vi beräknar e, f, g, och kommer till ekvationen för asymptotiska kurvor:

$$\frac{v}{u^3}(u')^2 - 2(u^{-2} + v^{-2})u'v' + \frac{u}{v^3}(v')^2.$$

Vi löser kvadratekvationen och får två ekvationer

$$v^3u' - u^3v' = 0, vu' - uv' = 0.$$

För den första ekvationen har vi

$$u'u^{-3} = v'v^{-3}, (u^{-2})' = (v^{-2})', u^{-2} = v^{-2} + c.$$

För den andra ekvationen,

$$u'u^{-1} = v'v^{-1}, (\log u)' = (\log v)', u = cv.$$

3. Vi har $E = v, F = 0, G = v$. Vi beräknar Christoffelsymboler och kommer till ekvationerna för geodeten

$$u'' + v^{-1}u'v' = 0, v'' + (2v)^{-1}((v')^2 - (u')^2) = 0. \qquad G$$

Den första ekvationen ger

$$vu'' + u'v' = 0,$$
$$(vu')' = 0,$$
$$u'v = c. \qquad *$$

I stället för att sätta det in i den andra ekvationen i (G), som också kan ge lösningen, men efter mycket arbete, kommer vi ihåg att vi har båglängdsparametrisering för geodeten, så

$$v(u'^2 + v'^2) = 1. \qquad **$$

Enligt kedjeregeln,

$$\frac{du}{dv}v' = u', \qquad ***$$

Från (*),(**) och (***) löser vi ut v', u' och kommer till differentialekvationen för (u, v):

$$(\frac{du}{dv})^2 = \frac{c^2}{v - c^2}.$$

Den sista ekvationen är enkelt att lösa:

$$\frac{du}{dv} = \pm\frac{c}{\sqrt{v - c^2}},$$

$$u = \pm 2c\sqrt{v - c^2} + c_1,$$

eller

$$(u - c_1)^2 = 4c^2(v - c^2),$$

och den här är ekvationen av geodeter; geodeter är paraboler.